

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**E.A.P. DE INGENIERIA MECANICA DE FLUIDOS**

**Método de lighthill para la generación de perfiles  
aerodinámicos**

**TESIS**

**para optar el Título Profesional de Ingeniero Mecánico de Fluidos**

**AUTOR**

**Luis Alfonso Guevara Barrantes**

**ASESOR**

**Raul Vargas Roncal**

**Lima – Perú**

**2006**

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>Necesidad del Método Lighthill</b>	2
<b>Objetivo</b>	2

## CAPITULO I

1.1 Consideraciones generales de flujo potencial	3
--	---

## CAPITULO II

### FLUJO POTENCIAL

2.1 Circulación	4
2.2 El Campo de Velocidades	5
2.3 El Campo de Aceleraciones	5
2.4 Campo Rotacional	6
2.5 Divergencia de $V$	7
2.6 Línea de Corriente	7
2.7 El Potencial de Velocidades	8
2.8 La Función Corriente	8
2.9 La Función Potencial	10
2.9.1 Componentes Radial y Angular de la Velocidad en Coordenadas Polares	11
2.10 La Red de Corriente	11
2.10.1 Propiedades de la Función Potencial	13
2.11 Singularidades Importantes en Flujo Potencial	14
2.11.1 Corriente Rectilínea o Corriente Rectilínea Uniforme	14
2.11.2 Fuente o Manantial	15
2.11.3 Sumidero	18
2.11.4 Vórtice	19

2.12 Composición de Campos por Singularidades	20
2.12.1 Doblete	21
2.12.2 Sumidero y Vórtice	24
2.12.2.1 Fuente mas Torbellino	25
2.12.3 Corriente Rectilínea con Fuente	26
2.12.4 Corriente Rectilínea Uniforme y Vórtice	26
2.13 Flujos Planos Alrededor de Cuerpos Cerrados	27
2.13.1 Ovalo de Rankine	27
2.13.2 Flujo Alrededor de un Cilindro con Circulación	28

### **CAPITULO III**

### **AERODINÁMICA**

3.1 Teorema de Kutta- Joukowsky	30
3.2 Fuerza de Sustentación	34
3.3 Fuerza de Arrastre	35
3.4 Momentos Aerodinámicos	36
3.5 Configuración Fluidodinámica	36
3.5.1 Distribución de presiones	37
3.5.2 Distribución de Velocidades	37
3.6 Primer Teorema de Blasius	38
3.7 Segundo Teorema de Blasius	38
3.8 Integral de Poisson	39
3.9 Operadores de Germain	39

### **CAPITULO IV**

### **PERFILES AERODINAMICOS**

4.0 Perfil aerodinámico	40
4.1 Los principales elementos de un perfil aerodinámico	40

4.1.1 Ángulo de ataque	40
4.1.2 Extradós	40
4.1.3 Intradós	40
4.1.4 Espesor	41
4.1.5 Borde de fuga o borde de salida	41
4.1.6 Borde de Ataque	41
4.1.7 Cuerda	41
4.1.8 Línea Media	41
4.1.9 Flecha máxima	41
4.2 Geometría de los perfiles	42
4.2.1 Principales relaciones geométricas	42

## **CAPITULO V**

### **MÉTODO DE LIDTHILL**

5.1 Método de Lighthill	43
5.2 Contribución personal de un programa en lenguaje fortran 90 for windows aplicando el método de lighthill para su uso en computadora	81

## **CAPITULO VI**

6.1 Conclusiones y Recomendaciones	95
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	96
<b>CRONOGRAMA</b>	99

# INTRODUCCIÓN

En vista de que estamos escasos en este campo; con escasez de papers, artículos, publicaciones, y que en las bibliotecas se encuentra muy poco, el objetivo de este trabajo es llenar ese vacío, no hay así nomás una tesis de ésta naturaleza, que profundice el estudio analítico de este caso aerodinámico para plasmar físicamente resultados de su análisis y dar respuestas a diversas incógnitas que se generan en el investigador. Este trabajo servirá de ayuda y como medio de consulta para mis amigos, compañeros de promoción, y para enriquecer la fecunda producción de investigaciones en mi amada escuela de INGENIERÍA MECANICA DE FLUIDOS, de la Facultad de Ciencias Físicas y para el enriquecimiento de nuestra querida Universidad es que me permito desarrollar este método que puede servir para el curso de aerodinámica de otras universidades.

En este sentido he incluido los conceptos de flujo potencial de aerodinámica, los teoremas de Blasius, conceptos de Sustentación, Arrastre, Momentos aerodinámicos, Operadores de Germaine, características de los perfiles, el desarrollo del método en sí, y un software apropiado para generar perfiles y finalmente la bibliografía.

## **NECESIDAD DEL MÉTODO**

La carencia de herramientas para uso del investigador anhelante de poder plasmar en el plano o en el espacio sus ideas y comunicárselas a los demás seres humanos fue lo que llevo a SIR JAMES LIGHTHILL a concebir un método matemático en el cual hace uso de una sucesión metódica de un conjunto de fundamentos y principios tales como la función de corriente, la transformación conforme, función potencial, flujos simples, composición de campos por singularidades para la obtención de fluidos más complicados y más reales, con la clara intención de poder generar resultados más aplicables, más realistas y más convenientes. No existe otra forma de generación de perfiles más estricto y científico en la actualidad en todo el mundo que éste.

## **OBJETIVO**

Este método permite generar un perfil aerodinámico, a partir de una distribución de velocidades dada a lo largo de su cuerda a un ángulo de ataque cualquiera.

# Capítulo I

## 1.1 Consideraciones generales de flujo potencial

Es un Flujo que admite un tratamiento netamente teórico; es la aplicación de un criterio matemático para establecer condiciones ideales en el flujo y poder estudiar el comportamiento del flujo de una manera más sencilla puntual y teórica.

Lo más importante para lo que nos sirve el flujo potencial es que nos dé las herramientas de la configuración fluidodinámica o sea que podemos hacer "líneas de corriente", hacer "líneas equipotenciales", podemos tomar un sumidero y una fuente y hacer un Doblete, podemos hacer composición de campos por esta singularidad: Doblete, sumidero, circulaciones, líneas, corrientes uniformes, que van formando cuerpos totalmente matemáticos ideales que asemejen una realidad, de algún objeto práctico (motivo de estudio, análisis o investigación) que estén utilizando, entonces usan el flujo potencial para hacer una semejanza entre la teoría y la práctica y que con las leyes teóricas se pueda comprender, interpretar, etc, el comportamiento real del sistema que se investiga. Para eso sirve el flujo potencial es decir nos da el comportamiento real pero en teoría. Justamente esto es lo que usa el ingeniero y el investigador; o sea una manera realmente matemática pura, debe

dar una respuesta “de la realidad” entonces hace del flujo potencial un campo teórico, pero “que se asemeje” a la realidad y que pueda **ESTUDIARSE** con “teoría” el comportamiento real. Esta es la importancia del flujo potencial.

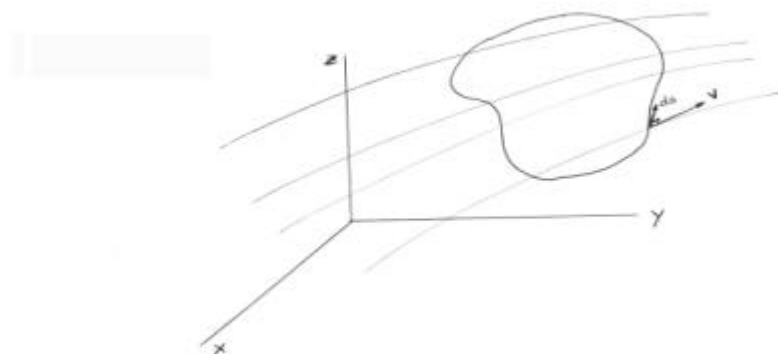
## CAPITULO II

### FLUJO POTENCIAL

#### 2.1 CIRCULACIÓN

Es la tendencia de un fluido a rotar alrededor de un eje. Definimos la circulación como la  $\oint$  curvilínea extendida a una curva cerrada en el instante “t” de la componente tangencial de la velocidad a lo largo de dicha curva.

$$\Gamma = \oint_c v_t ds = \oint \vec{v} d\vec{s}$$



Para flujo irrotacional  $\Gamma = 0$



$$\Gamma = \oint v ds = 2pk$$

## 2.2 EL CAMPO DE VELOCIDADES

La más importante propiedad del flujo potencial es el campo de velocidades :

$$V(x, y, z, t)$$

Siendo la velocidad un vector función de la posición y del tiempo; con el campo de velocidades determino las propiedades del fluido como funciones de la posición y del tiempo.

$$V_x = F(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} = u$$

$$V_y = F(x, y, x, t) = \frac{dy}{dt} = \mathbf{n}$$

$$V_z = F(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} = \mathbf{w}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

## 2.3 EL CAMPO DE ACELERACIONES Sabiendo que la aceleración está definida

por éste concepto:  $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \{La \text{ variación de la velocidad en el tiempo}\}$

Y siendo sus componentes en las direcciones respectivas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \text{Aceleraciones locales}$$

Obtenemos una derivada total, variación total llamada:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Aceleración Mática} \\ &\text{o Derivada Sustancial} \end{aligned} \right\} \rightarrow \bar{a} = \frac{dv}{dt}(x, y, z, t)$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}(x, y, z, t) = \frac{d\bar{v}}{dt} + (u \frac{d\bar{v}}{dx} + v \frac{d\bar{v}}{dy} + w \frac{d\bar{v}}{dz})$$

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} \bar{V}(x, y, z, t) = \underbrace{\left( \frac{d\bar{v}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\bar{v}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{d\bar{v}}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right)}_{\text{Aceleración Convectiva}} + \underbrace{\frac{d\bar{v}}{dt}}_{\text{Aceleración Local}}$$

1

## 2.4 CAMPO ROTACIONAL

Se deriva del campo de velocidades. Se llama “rotor de V” o “rotacional de V” al vector:

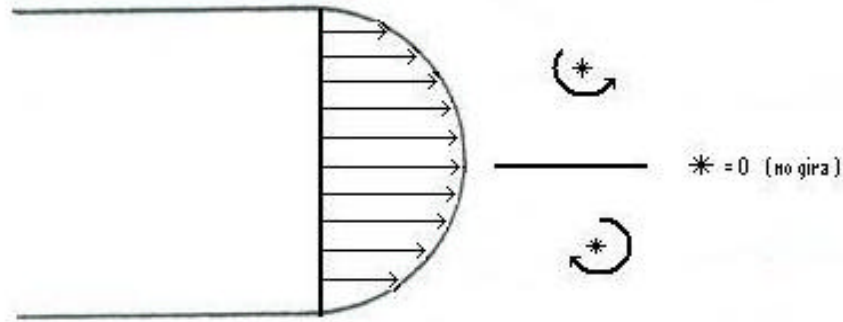
$$\nabla \times \bar{V} = \text{rot} \bar{V} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \bar{V} = \text{rot} \bar{V} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \frac{d}{dz} = \left( \frac{dV_z}{dy} - \frac{dV_y}{dz} \right) \hat{i} - \left( \frac{dV_z}{dx} - \frac{dV_x}{dz} \right) \hat{j} - \left( \frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy} \right) \hat{k}$$

También  $\text{rot} \bar{V} = 2\bar{\omega}$ , igual a dos veces la velocidad angular.

---

<sup>1</sup> Aceleración convectiva: aparece cuando la partícula se mueve a través de regiones en que la velocidad varía



## 2.5 DIVERGENCIA DE $\vec{V}$

Es la velocidad de dilatación cúbica por unidad de volumen inicial.

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dv}{dt} = \text{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$$

Si la divergencia es nula  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  el flujo es incomprensible.

Si  $\nabla \times \vec{V} = 0$  el flujo es irrotacional.

## 2.6 LINEA DE CORRIENTE

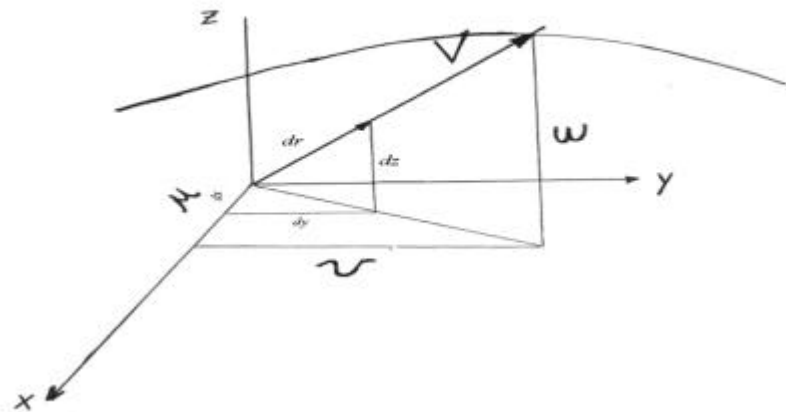
Es aquella que en un instante dado es tangente al vector velocidad en todo punto.

El conjunto de líneas de corriente constituyen un tubo de corriente impenetrable por dichas líneas de corriente. Las líneas de corriente se calculan a partir del campo de velocidades, en términos de sus componentes:

$$dx = V_x dt$$

$$dy = V_y dt$$

$$dz = V_z dt$$



y para un instante :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

Que vendría a ser la ecuación diferencial de las líneas de corriente.

## 2.7 EL POTENCIAL DE VELOCIDADES

La irrotacionalidad da lugar a una función escalar  $f$ .

Un teorema del análisis vectorial muestra que un vector con rotacional igual a cero es el gradiente de una función escalar.

$$\text{Si } \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$

Entonces:

$$\vec{V} = \text{GRADIENTE} (f) = \nabla f$$

Donde  $f = F(x, y, z, t)$  se denomina “Potencial de velocidades”

Conocida  $f$  inmediatamente quedan definidas las componentes de la velocidad:

$$u = \frac{df}{dx}; \quad v = \frac{df}{dy}; \quad w = \frac{df}{dz}$$

## 2.8 LA FUNCIÓN CORRIENTE:

Recordemos la definición de gradiente en el plano y sus propiedades.

Dada una función escalar en el plano XY tal como  $a(x, y)$ , se llama gradiente de  $a(x, y)$ , al vector cuyas componentes son las derivadas parciales de  $a(x, y)$  :

$$\text{Grad } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dx} \vec{i} + \frac{d\mathbf{a}}{dy} \vec{j}$$

Sus propiedades son:

P1. El Grad  $\mathbf{a}$  es normal a las líneas  $\mathbf{a} = \text{CTE}$

P2. El módulo de Grad  $\mathbf{a}$  es la derivada de  $\mathbf{a}$  según la normal a las líneas  $\mathbf{a} = \text{CTE}$  o lo que es lo mismo:

$$|\text{Grad } \mathbf{a}| = \frac{d\mathbf{a}}{dn}$$

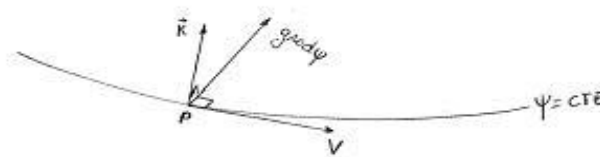
P3. El sentido de Grad  $\mathbf{a}$  es el que corresponde a la  $\mathbf{a}$  creciente. Ahora bien: supongamos un fluido incomprensible, bidimensional y permanente, y si consideramos una familia de líneas de corriente; sus ecuaciones serán:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$$

y se puede considerar que esta familia viene definida por una cierta función escalar  $\Psi(x, y)$  que se denomina FUNCIÓN DE CORRIENTE, con un valor constante diferente para línea de corriente:  $\Psi(x, y) = \text{CTE}$

En el punto “p” sobre una línea de corriente los tres vectores son normales entre sí de modo que se cumple:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Grad} \Psi} \times \vec{K}$$



Siendo los componentes de  $\vec{V}$ :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d\Psi}{dx} & \frac{d\Psi}{dy} & \frac{d\Psi}{dz} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{d\Psi}{dy} \vec{i} - \frac{d\Psi}{dx} \vec{j}$$

$$V_x = \frac{d\Psi}{dy} \rightarrow \frac{d\Psi}{dy} = u \quad [2.1]$$

$$V_y = -\frac{d\Psi}{dx} \rightarrow -\frac{d\Psi}{dx} = v \quad [2.2]$$

Por otro lado, si  $n$  es la dirección normal a la línea de corriente genérica  $\Psi$ .

$$|\text{grad}\Psi| = \frac{d\Psi}{dn} \quad (\text{y como } \vec{v} = \text{grad}\Psi \times \vec{k})$$

$$\therefore |\text{grad}\Psi| = V \quad \text{de modo que } \frac{d\Psi}{dn} = V$$

que viene a ser el gasto que pasa entre dos líneas de corriente:

$$\text{o sea} \quad q = \int_1^2 d\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$$

## 2.9 LA FUNCIÓN POTENCIAL

El análisis del flujo bidimensional sólo es posible si se cumple que el campo de velocidades es un campo potencial, es decir un campo en el que existe una función escalar  $\mathbf{f}$  llamada “función potencial”, tal que:

$$\vec{V} = -\text{Grad}\mathbf{f}$$

ya que  $\text{rot}\vec{V} = 0$  es decir que si el campo de velocidades es potencial, también será irrotacional, por lo cual es indiferente decir “campo potencial” o “campo irrotacional”.

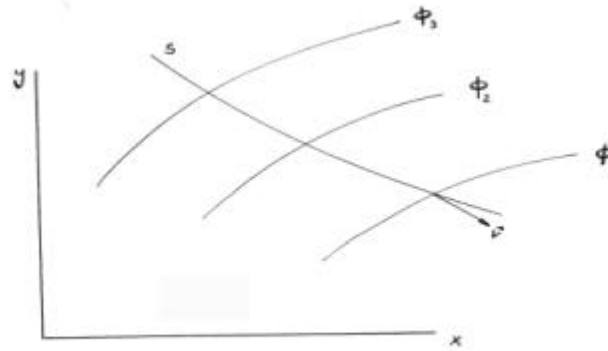
Por lo tanto los componentes de la velocidad serán

$$V_x = -\frac{d\mathbf{f}}{dx}$$

$$V_y = -\frac{d\mathbf{f}}{dy}$$

$$\text{También se cumple: } \frac{d\mathbf{f}}{ds} = -V$$

Siendo  $s$  la dirección normal a las líneas  $\mathbf{f} = \text{Cte}$  llamadas líneas equipotenciales.



Puesto que las direcciones  $n$  y  $s$  son normales entre sí, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son ortogonales entre sí.

### 2.9.1 COMPONENTES RADIAL Y ANGULAR DE LA VELOCIDAD EN COORDENADAS POLARES

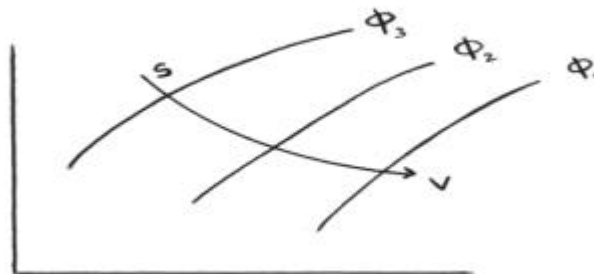
$$V_r = \frac{d\mathbf{f}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dq} \quad \text{Velocidad radial}$$

$$V_q = \frac{1}{r} \left( \frac{d\mathbf{f}}{dq} \right) = - \frac{d\Psi}{dr} \quad \text{Velocidad angular}$$

### 2.10 LA RED DE CORRIENTE

$$\text{Sabemos que: } V = \frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\mathbf{f}}{ds}$$

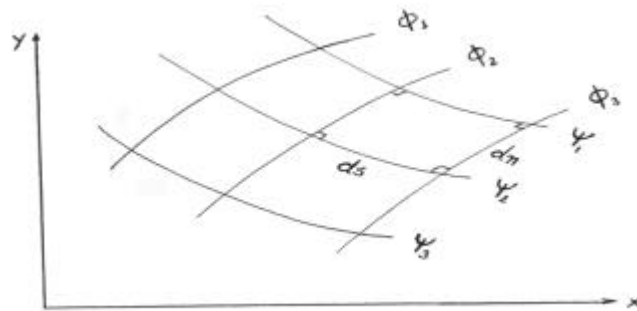
Puesto que las direcciones  $n$  y  $s$  son ortogonales entre sí, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son ortogonales entre sí.



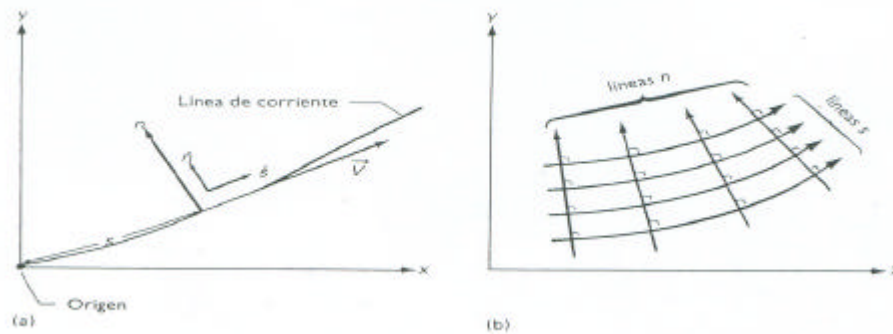
$$\text{Por lo tanto: } \frac{d\mathbf{f}}{ds} \Rightarrow \frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{d\Psi}{ds} \quad \text{o sea si se escogen incrementos iguales para}$$

$\mathbf{f}$  y  $\Psi$  resulta que  $dn=ds$  ; es decir, que las líneas de corriente y las líneas

equipotenciales además de ser ortogonales formarían una malla de diferenciales iguales, o sea de cuadraditos geométricos.



A esta malla se denomina red de flujo o red de corriente.



Finalmente, el estudio del flujo plano en un cierto contorno se refiere a la obtención de la red de corriente para ese contorno, y a partir de esta red de corriente (o de flujo) que es única en cada contorno, deducir “la distribución de velocidades” o “distribución de presiones” en las “zonas de interés”.

El fluido ideal es incompresible si:

$$\text{div} \mathbf{V} = 0$$

Y para el plano XY queda:

$$\text{div}(\text{Grad} \mathbf{f}) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{d\mathbf{f}}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( \frac{d\mathbf{f}}{dy} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \mathbf{f}}{dx^2} + \frac{d^2 \mathbf{f}}{dy^2} = 0$$

Es decir que  $\mathbf{f}$  cumple con la ecuación de Laplace, indicando con ello que es una función armónica. Además el fluido ideal es irrotacional, por lo que la componente según Z del vector  $\text{rot} \vec{V}$  es nula:



$$\frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy} = 0$$

reemplazando los valores para  $V_x$  y  $V_y$  de [2.1] y [2.2]

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left( -\frac{d\mathbf{y}}{dx} \right) - \frac{d}{dy} \left( \frac{d\mathbf{y}}{dy} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \mathbf{y}}{dx^2} + \frac{d^2 \mathbf{y}}{dy^2} = 0$$

Es decir que  $\Psi$  también cumple con la ecuación de Laplace, indicando con ello que también es una función armónica.

En conclusión las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\Psi$  no son independientes, sino que están relacionadas entre sí a través de las ecuaciones de CAUCHY-RIEMANN:

$$V_x = \frac{d\mathbf{f}}{dx} = \frac{d\Psi}{dy} = u$$

$$V_y = \frac{d\mathbf{f}}{dy} = -\frac{d\Psi}{dx} = v$$

y en coordenadas polares:

$$V_r = -\frac{d\mathbf{f}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}}$$

$$V_q = -\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}} = -\frac{d\mathbf{y}}{dr}$$

### 2.10.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN POTENCIAL ( $\Phi$ )

P1. Si  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  son dos funciones potenciales que satisfacen la ecuación de Laplace, entonces las funciones:  $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$  o  $(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2)$

También cumplen con la ecuación de Laplace.

P2. Una función potencial que satisface la ecuación de Laplace en un flujo determinado en un cierto contorno, representa la solución única del problema de dicho flujo.

P3. Considera una curva AB cualquiera dentro de un flujo, la integral de línea a lo largo de esa curva desde A hasta B es:

$$\int_A^B \vec{v} d\vec{s} = \int_A^B (v_x dx + v_y dy)$$

Donde  $d\vec{s}$  es el vector diferencial de arco sobre la curva AB

$$\int_A^B \left( -\frac{d\mathbf{f}}{dx} dx - \frac{d\mathbf{f}}{dy} dy \right) = -\int_A^B d\mathbf{f} = \int_B^A d\mathbf{f} = \mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B$$

De modo que si la curva es cerrada, la integral de línea, a la que llamaremos circulación  $\Gamma$  vale:

$$\Gamma = \int_A^B \vec{V} d\vec{s} = \int_B^A d\mathbf{f} = 0$$

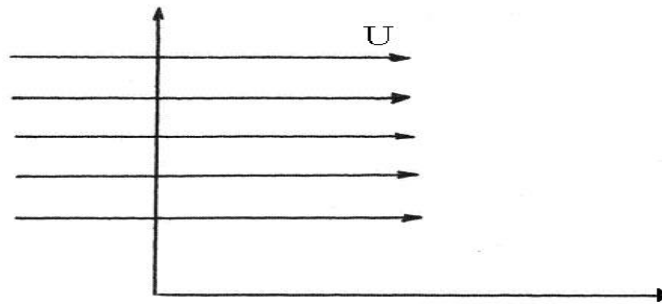
Con lo que deducimos que en el flujo bidimensional del fluido ideal la circulación “ $\Gamma$ ” es nula.

## 2.11 SINGULARIDADES IMPORTANTES EN FLUJO POTENCIAL

### 2.11.1 CORRIENTE RECTILÍNEA o CORRIENTE RECTILÍNEA

#### UNIFORME

Ahora vamos a tocar una singularidad como es “la corriente rectilínea” que es la que sigue una misma dirección , no tiene nada que ver con el tiempo.



Explicando mejor: supongamos que tenemos un fluido de izquierda a derecha en forma recta cuyas líneas de corriente sean laminares, porque donde aparecen líneas de corriente turbulentas quiere decir que hay viscosidad, debido a la viscosidad es que se produce la turbulencia, pero como estamos en “flujo potencial” decimos “la corriente rectilínea laminar” son laminas, entonces cuyas características van a cumplir con los siguientes parámetros: “que la velocidad en la dirección del eje X está dada por la derivada parcial” :  $\frac{d\mathbf{f}}{dx} = \frac{dy}{dy}$  que es la variación del campo

potencial en esta dirección  $\left(\frac{d\mathbf{f}}{dx}\right)$  que también es igual a la variación de las líneas

de corriente en la dirección ortogonal  $\left(\frac{dy}{dy}\right)$  y será constante.

$$u = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dy} = CTE$$

Para  $V_y = v$  no existe

$$V = \frac{df}{dy} = -\frac{dx}{dx} = 0 \quad \text{porque no existe componente en el eje } y.$$

Pero que cumplen con las ecuaciones de Cauchy – Riemann y cuyo potencial se define por esto.

$$f = ux$$

$$y = uy$$

Cuya función potencial es la siguiente:

$$f(z) = U(z) + C$$

$$F(Z) = f + iy$$

$$F(Z) = ux + iuy$$

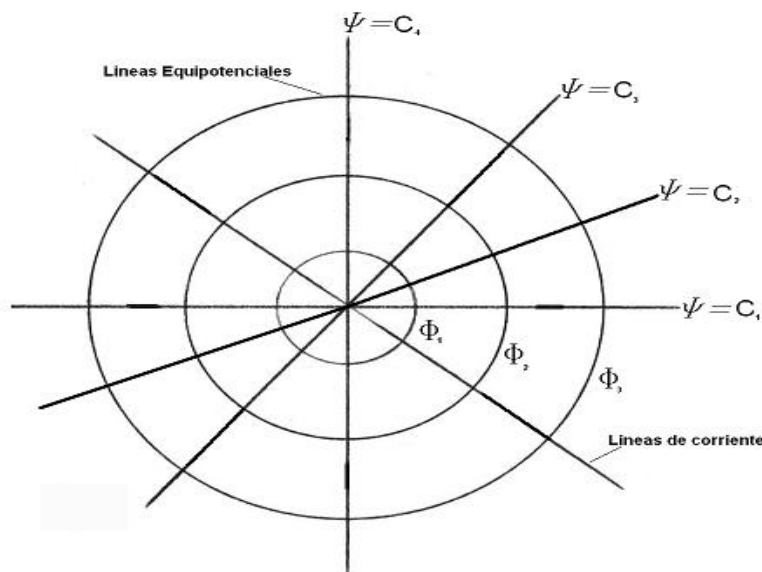
$$F(Z) = u(x + iy)$$

$$\text{pero } Z = x + iy$$

$$\Rightarrow F(Z) = UZ + C$$

### 2.11.2 FUENTE O MANANTIAL

El fluido surge del origen y fluye radialmente hacia el infinito.



También podríamos describirla como del origen brotan las líneas de corriente extendiéndose radialmente hacia el infinito y las líneas equipotenciales son líneas concéntricas con el origen.

Sea el origen de coordenadas el foco o centro de la fuente que emite un caudal constante de fluido incompresible y bidimensional.

A una distancia  $r$  de dicho centro, dicho caudal será:  $Q = 2\pi r V_r$ , donde  $V_r$  es la velocidad radial del fluido y admitiremos que  $V_\theta$  (o sea la velocidad normal u ortogonal a  $V_r$ ) es nula (requisito indispensable en una fuente).

$$\mathbf{f} = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \text{Ln}(r)$$

$$\mathbf{y} = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \mathbf{q}$$

$Q \Rightarrow$  caudal volumetrico

$$\mathbf{q} = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$Z = r(\cos \mathbf{q} + i \text{Sen } \mathbf{q}) \rightarrow Z = re^{i\mathbf{q}}$$

en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{S}}{2\mathbf{p}} \text{Ln}(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{S}}{2\mathbf{p}} \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Potencial de velocidades

$$Q = 2\mathbf{p}rV_r \rightarrow V_r = \frac{Q}{2\mathbf{p}r}$$

$$\rightarrow V_r = \frac{d\mathbf{f}}{dr}$$

$$d\mathbf{f} = V_r dr$$

$$d\mathbf{f} = \left[ \frac{Q}{2\mathbf{p}r} \right] dr$$

$$\int d\mathbf{f} = \int \left[ \frac{Q}{2\mathbf{p}} \right] \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \text{Ln}r + C}$$

$$\boxed{\Phi = K \text{Ln}r + C}$$

Ecuación de las Líneas de corriente

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}}$$

$$d\mathbf{y} = rV_r d\mathbf{q}$$

$$d\mathbf{y} = \frac{Q}{2\mathbf{p}} d\mathbf{q}$$

$$\int d\mathbf{y} = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \int d\mathbf{q}$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \mathbf{q} + C$$

$$\boxed{\Psi = K\mathbf{q} + C}$$

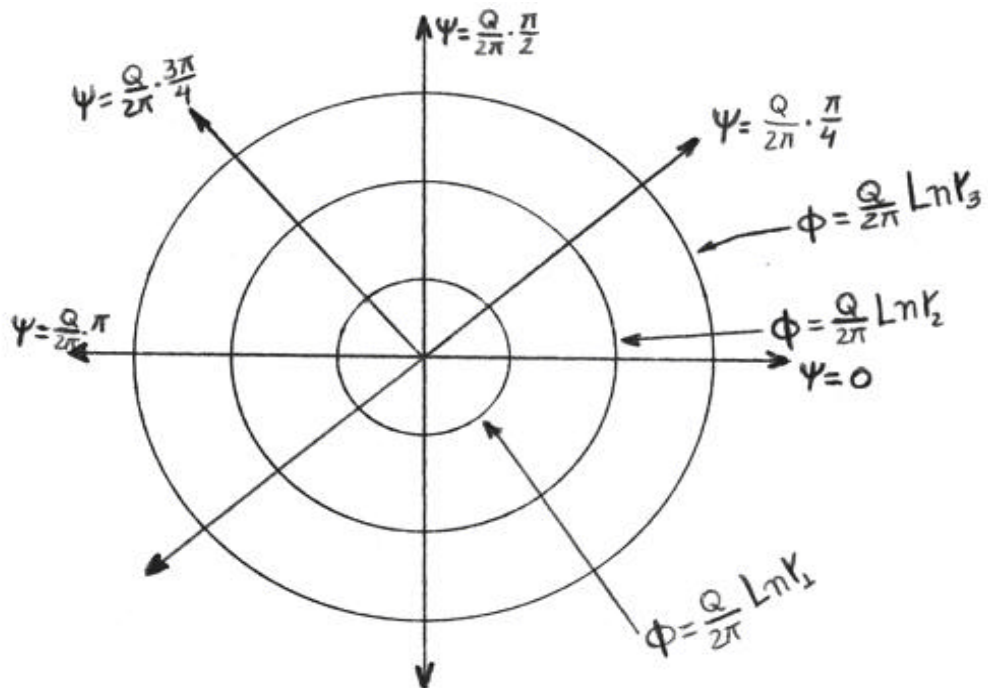
Potencial complejo

$$F(Z) = \Phi + i\Psi$$

$$F(Z) = \frac{Q}{2p} \ln r + i \frac{Q}{2p} \theta$$

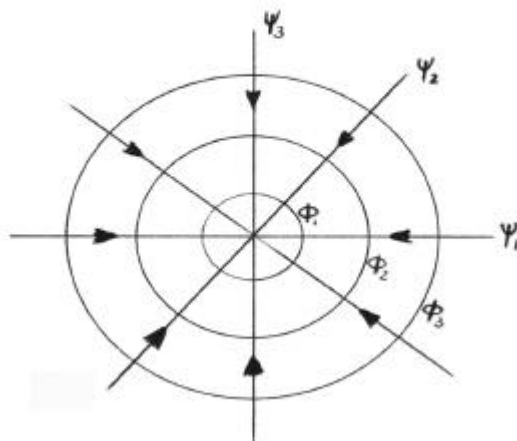
$$F(Z) = \frac{Q}{2p} (\underbrace{\ln r + i\theta}_{\ln Z})$$

$$F(Z) = \frac{Q}{2p} \ln Z + C$$



### 2.11.3 SUMIDERO

Un fluido alrededor del origen fluye radialmente hacia el origen.



$$\mathbf{f} = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \text{Ln}(r) \qquad \mathbf{y} = -\frac{Q}{2\mathbf{p}} \mathbf{q}$$

$\mathbf{y}$  le colocamos el signo negativo por el cambio del sentido de las líneas de corriente.

en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} \text{Ln}(x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \text{Potencial de velocidades}$$

$$\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} \text{arcTg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{Función corriente}$$

Función potencial para el sumidero:  $F(Z) = \Phi + i\Psi$

$$F(Z) = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \text{Ln}r - i\frac{Q}{2\mathbf{p}} \mathbf{q}$$

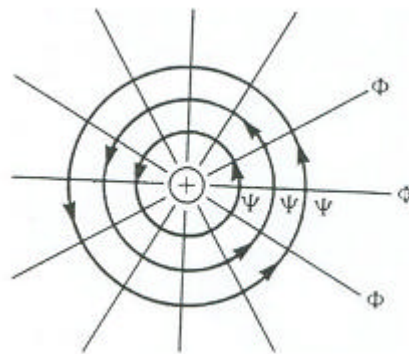
$$F(Z) = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \underbrace{(\text{Ln}r - i\mathbf{q})}_{\text{Ln}Z}$$

$$\boxed{F(Z) = \frac{Q}{2\mathbf{p}} \text{Ln}Z + C}$$

$$\boxed{F(Z) = K \text{Ln}Z + C}$$

#### 2.11.4 VÓRTICE

El flujo circula alrededor del origen intensificándose su velocidad del infinito hacia el origen, o mejor dicho la velocidad tangencial aumenta inversamente con el radio.

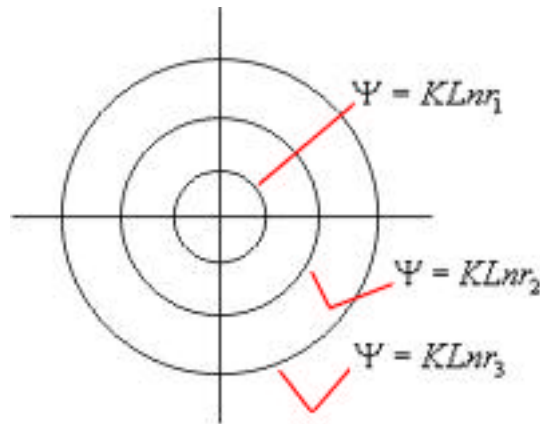


En esta singularidad las líneas de corriente son circulares (o concéntricas) y las líneas equipotenciales son radiales. Es un flujo muy útil que puede crearse fácilmente escogiendo la función corriente de la fuente como potencial de velocidad del vórtice.

$$\text{Hacemos } \frac{Q}{2\mathbf{p}} = K \qquad Q = 2\mathbf{p}rVr$$

$$\mathbf{y} = K \ln r$$

$$\mathbf{f} = K \mathbf{q}$$



Función potencial para el vórtice:  $F(Z) = \Phi + i\Psi$

$$F(Z) = \mathbf{f} + i\mathbf{y}$$

$$F(Z) = \frac{Q}{2p}(\mathbf{q} + i \ln r) + C$$

$$F(Z) = K(\mathbf{q} + i \ln r) + C$$

$$\boxed{F(Z) = K \ln Z + C}$$

Como vemos es un flujo circulatorio en el cual la velocidad tangencial aumenta mientras disminuye el radio; de tal manera que en el origen de coordenadas se tenga velocidad infinita y en donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{y}$  no están definidas.  $K$  será llamada intensidad del vórtice y tiene las mismas dimensiones que la fuente.

La circulación para este tipo de flujo no se anula cuando se integra en un circuito que encierra al núcleo del vórtice

Definición de circulación:  $\Gamma = \int_c V ds$

Sabemos que  $ds = r d\mathbf{q} \rightarrow \Gamma = \int_c V_q r d\mathbf{q}$

$$\Gamma = \int_0^{2p} \frac{Q}{2pr} r d\mathbf{q}$$

$$\Gamma = \int_0^{2p} K d\mathbf{q}$$

$$\Gamma = 2pK \text{ o lo que es lo mismo: } K = \frac{\Gamma}{2p}$$

$$\Gamma = \int_c V_q ds = 2pK \quad \text{Circulación para todas las trayectorias alrededor del origen}$$

(incluido el vórtice).

## 2.12 COMPOSICIÓN DE CAMPOS POR SINGULARIDADES

Conocidas las singularidades anteriores, podremos construir una variedad de “flujos potenciales” compuestos por ellos, según lo que nosotros deseemos (o quisiéramos formar), y para ello haremos una analogía de las propiedades anteriormente vistas para  $\mathbf{f}$  y para  $\mathbf{y}$ .

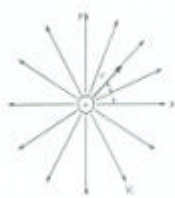
Estos flujos potenciales interesantes (composición de campos) resultan entonces sumando las funciones de los potenciales, sumando las funciones de corriente de cada una de las singularidades respectivas, resultando funciones combinadas en función de X e Y para valores de por ejemplo:  $\mathbf{y} = CTE = \sum \mathbf{y}_i$  incluso para familias de funciones diferentes.

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_i + \mathbf{y}_k$$

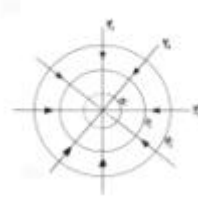
Por lo tanto tendrá validez el principio de superposición de singularidades.

Veamos que sucede cuando componemos una fuente con un sumidero de igual

intensidad (K).      Intensidad =  $K = \frac{Q}{2p}$



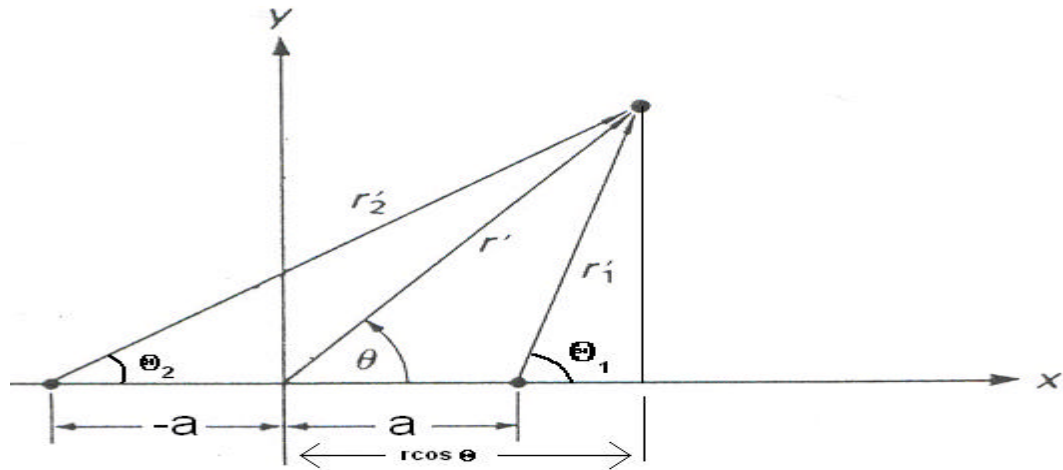
+



= “DOBLETE”

### 2.12.1 DOBLETE





consideramos a la fuente de intensidad  $K$  situada en el punto  $(-a, 0)$  y al sumidero de intensidad  $-K$  situada en el punto  $(+a, 0)$ . Para la fuente los valores de  $\Psi$  aumentan en sentido antihorario, mientras que en el sumidero los valores de  $\Psi$  aumentan en sentido horario. La función corriente para la combinación fuente-sumidero será

$$y = -\frac{Q}{2p}(q_s - q_f)$$

$$y = -\frac{Q}{2p}(q_1 - q_2)$$

la que se puede volver a escribir, previo ordenamiento, como:

$$\tan\left(-\frac{2py}{Q}\right) = \tan(q_1 - q_2) = \frac{\tan q_1 \tan q_2}{1 + \tan q_1 \tan q_2} \quad [1]$$

$$\text{Tang } \mathbf{q}_1 = \frac{r \text{Sen } \mathbf{q}}{r \text{Cos } \mathbf{q} - a} \quad [2]$$

$$\text{Tang } \mathbf{q}_2 = \frac{r \text{Sen } \mathbf{q}}{r \text{Cos } \mathbf{q} + a} \quad [3]$$

sustituimos [2] y [3] en [1]

$$\text{Tan} \left( -\frac{2p\mathbf{y}}{Q} \right) = \frac{\frac{r \text{Sen } \mathbf{q}}{r \text{Cos } \mathbf{q} - a} - \frac{r \text{Sen } \mathbf{q}}{r \text{Cos } \mathbf{q} + a}}{1 + \frac{r \text{Sen } \mathbf{q} r \text{Sen } \mathbf{q}}{(r \text{Cos } \mathbf{q} - a)(r \text{Cos } \mathbf{q} + a)}}$$

operando convenientemente

$$\text{Tan} \left( -\frac{2p\mathbf{y}}{Q} \right) = \frac{2ar \text{Sen } \mathbf{q}}{r^2 - a^2}$$

$$\left( -\frac{2p\mathbf{y}}{Q} \right) = \text{arcTg} \left[ \frac{2ar \text{Sen } \mathbf{q}}{r^2 - a^2} \right]$$

$$\mathbf{y} = -\frac{Q}{2p} \text{arcTg} \left( \frac{2ar \text{Sen } \mathbf{q}}{r^2 - a^2} \right)$$

Para valores pequeños de  $a$

$$\mathbf{y} = -\frac{Q}{2p} \frac{2ar \text{Sen } \mathbf{q}}{r^2 - a^2} \rightarrow \mathbf{y} = -\frac{Q}{p} \frac{a r \text{Sen } \mathbf{q}}{(r^2 - a^2)} \quad [4]$$

Ya que la tangente del ángulo tiende al valor del ángulo para ángulos pequeños. El doblete se forma haciendo que la fuente y el sumidero tiendan el uno hacia el otro, hasta que estén juntos, es decir  $a \rightarrow 0$  y al mismo tiempo  $Q \rightarrow \infty$  de tal manera que en el limite el producto  $\frac{Qa}{p}$  permanezca constante (sea un número finito M)

En este caso, como  $\frac{r}{r^2 - a^2} \rightarrow \frac{1}{r}$

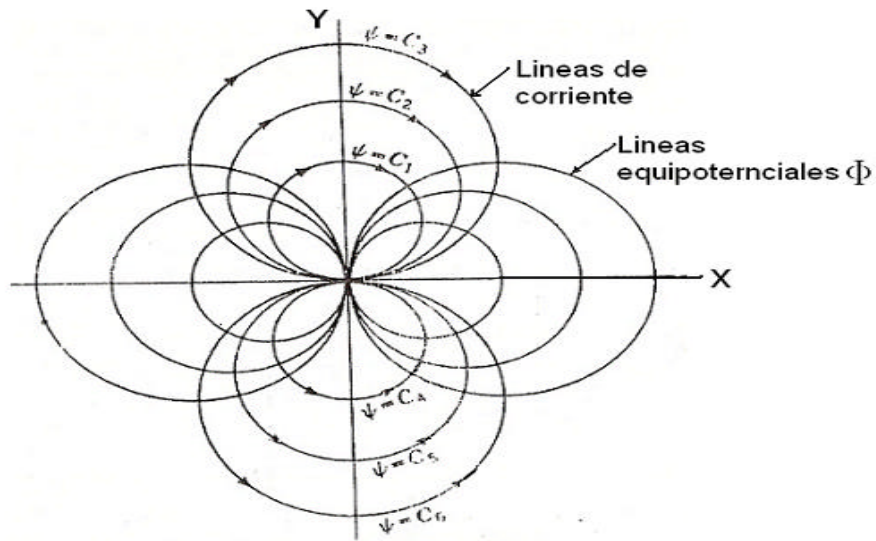
La ecuación (4)  $\mathbf{y} = -\frac{Qa}{p} \frac{r \text{Sen } \mathbf{q}}{(r^2 - a^2)}$  se reduce a:

$$\mathbf{y} = -M \frac{1}{r} \text{Sen } \mathbf{q} \rightarrow \boxed{\mathbf{y} = -\frac{M \text{Sen } \mathbf{q}}{r}}$$

Donde M, una constante igual a  $Qa/p$  se denomina intensidad del doblete.

El potencial de velocidad del doblete es:  $\boxed{\mathbf{f} = \frac{M \text{Cos } \mathbf{q}}{r}}$

Las líneas de corriente del conjunto se intersectan en los puntos cuya suma tiene un valor constante y son círculos que van de la fuente al sumidero.



Las funciones  $y$  y  $f$  en coordenadas polares serán

$$y = -\frac{M \sin \theta}{r}$$

$$f = \frac{M \cos \theta}{r}$$

Luego el potencial complejo del doblete será:

$$f(z) = f + iy$$

$$F(Z) = \frac{M x}{x^2 + y^2} - i \frac{M y}{x^2 + y^2}$$

Luego:

$$F(Z) = \frac{M x - iM y}{x^2 + y^2}$$

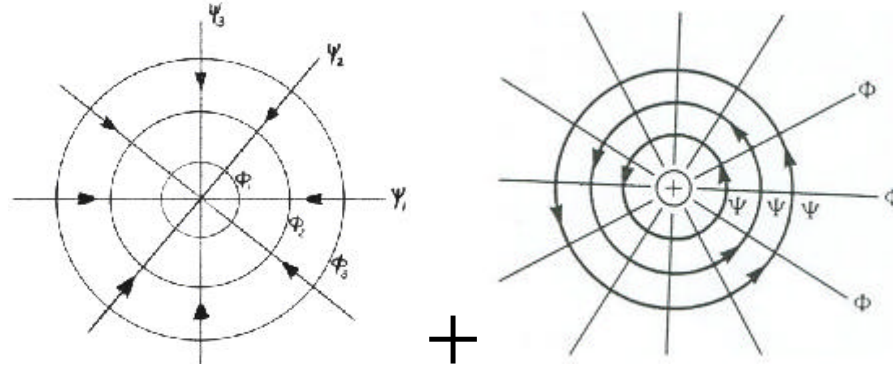
$$F(Z) = \frac{M(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)}$$

$$F(Z) = \frac{M}{x + iy}$$

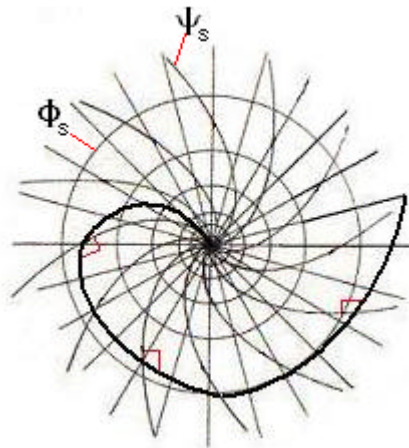
$$\boxed{F(Z) = \frac{M}{Z}}$$

## 2.12.2 SUMIDERO Y VÓRTICE

Un flujo compuesto de un sumidero y un vórtice o torbellino, o también de una fuente y un vórtice constituyen una aplicación interesante y se obtienen superponiendo las soluciones de dichas singularidades.



$$\begin{cases} \mathbf{y}_s = -K\mathbf{q} \\ \mathbf{f}_s = -KLn r \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{y}_v = +KLn r \\ \mathbf{f}_v = K\mathbf{q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{y} = -K_s\mathbf{q} + K_vLn r \\ \mathbf{f} = -K_sLn r + K_v\mathbf{q} \end{cases}$$

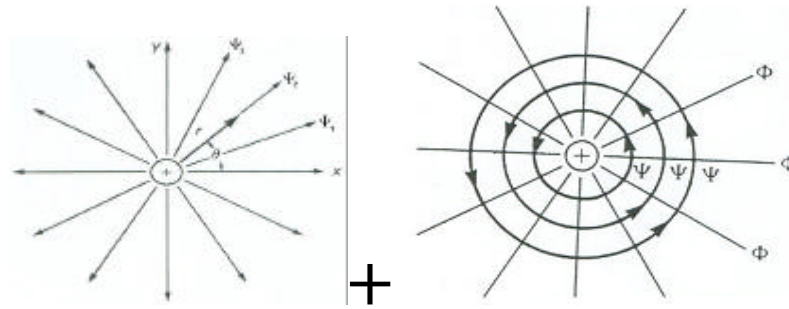


Las líneas de corriente resultante son espirales dirigidas al origen común a ambas singularidades (sumidero y vórtice) y los espirales son de forma:

$$r = C_1 e^{kq/k} \quad \text{con} \quad C_1 = e^{y/k} = Cte$$

que vienen a ser espirales logarítmicas. Es un tipo de flujo entrante que simulan a un agujero de drenaje de un depósito.

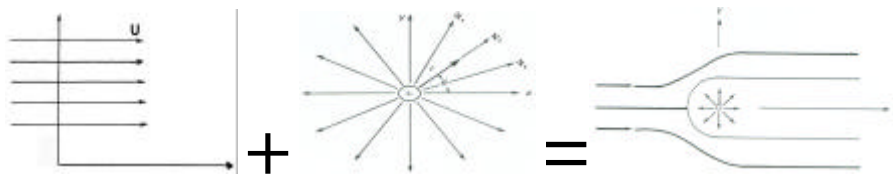
### 2.12.2.1 FUENTE MAS TORBELLINO



Si el tipo de flujo fuera saliente (manantial + torbellino) las líneas de corriente serían las de un difusor centrífugo muy parecidas a las del TIPO ENTRANTE solo que tendrían dirección opuesta, es decir que las espirales logarítmicas salen del origen de coordenadas.

Las líneas equipotenciales para el sumidero y vórtice son también espirales logarítmicas con curvatura opuesta y siempre serán ortogonales a las líneas de corriente  $\Psi$ .

### 2.12.3. CORRIENTE RECTILINEA CON FUENTE



Composición conocida también como PROA DE FURHMANN. Sea una corriente uniforme con velocidad  $V_\infty$  en la dirección del eje X y la fuente situada en el origen de coordenadas.

$$\Psi_{CR} = V_x y$$

$$\Psi_F = Kq$$

En estas condiciones sumamos los efectos para obtener en coordenados polares las líneas de corriente:

$$\Psi = \underbrace{V_\infty r \text{ Sen} q}_y + Kq$$

Para representar dichas líneas podemos dar a esta función diversos valores constantes y dibujar las líneas correspondientes para diferentes valores de  $r$  y  $q$  ya que se debe conocer previamente la intensidad de la fuente.

$$\psi = K\pi \quad \text{Parte Superior}$$

$$\psi = -K\pi \quad \text{Parte Inferior}$$

#### 2.12.4 CORRIENTE RECTILÍNEA UNIFORME Y VÓRTICE

Considerando una corriente uniforme en el eje X y un torbellino de intensidad K situado en el origen de coordenadas. Superponiendo ambas singularidades para la función corriente tendremos:

$$\Psi = \Psi_{corriente} + \Psi_{vortice}$$

$$\Psi = V_{\infty} r \text{ Sen } q + K \text{ Lnr}$$

los componentes de la velocidad son:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{dy}{dq} = V_{\infty} \text{Cos } q$$

$$V_q = -\frac{dy}{dr} = -\left[V_{\infty} \text{Sen } q + \frac{K}{r}\right]$$

Hacemos  $V_r = V_{\theta} = 0$  y determinamos el punto de remanso en  $\theta = 90^\circ$  con

$r = a = \frac{K}{V_{\infty}}$  o el punto  $(x, y) = (0, a)$  que es donde la velocidad inducida por el

torbellino es nula;  $\frac{K}{r}$  está en el sentido contrario a las agujas del reloj y es ésta

igual a la velocidad  $V_{\infty}$ . Lo más interesante es probablemente la existencia de una fuerza que es normal a la corriente uniforme en cualquier lugar del entorno del vórtice.

#### 2.13. FLUJOS PLANOS ALREDEDOR DE CUERPOS CERRADOS

Se pueden armar muchos cuerpos cerrados haciendo superposiciones de muchas singularidades entre las que no debe faltar la corriente uniforme rectilínea; por

ejemplo si a una fuente y a un sumidero se los embiste con una corriente rectilínea uniforme, se obtiene una forma cilíndrica denominada “ovaló de Rankine”.

### 2.13.1. OVALO DE RANKINE

Empleando las ecuaciones de la corriente rectilínea uniforme en la dirección X, y de las ecuaciones de corriente para fuente y sumidero de igual intensidad obtenemos:

$$\Psi = V_{\infty} r \text{Sen} \mathbf{q} - K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$$

### 2.13.2. FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO CON CIRCULACIÓN

Cuando embestimos a un doblete con una corriente uniforme se forma un cilindro y si a éste le añadimos un vórtice en el mismo punto o centro del cilindro, éste (el cilindro) no cambia de forma pero ahora éste presenta circulación ( $\Gamma$ );

CORRIENTE UNIFORME + UN DOBLETE + UN VÓRTICE

Por lo tanto la función corriente para el conjunto (de superposiciones) y para el cilindro con circulación centrado en el origen es:

$$\Psi = V_{\infty} r \text{Sen} \mathbf{q} - \frac{M \text{Sen} \mathbf{q}}{r} - K \text{Ln} r + \text{CTE} \quad (1)$$

El potencial de velocidades es:

$$\mathbf{f} = V_{\infty} r \text{Cos} \mathbf{q} + \frac{M \text{Cos} \mathbf{q}}{r} - \frac{Q}{2\mathbf{p}} \mathbf{q} + \text{CTE}$$

Para que la función corriente represente al flujo entorno a un cilindro circular es necesario que  $\mathbf{y} = \text{cte}$  para  $r = a$  donde  $a$  es el radio del cilindro. Después de este pequeño análisis la ec. (1) la podemos escribir como:

$$\mathbf{y} = \left( V - \frac{M}{r^2} \right) r \text{sen} \mathbf{q}$$

Concluyendo que  $\psi = 0$  para  $r = a$  si

$$V - \frac{M}{a^2} = 0$$

Lo cual indica que la intensidad del doblete,  $M$ , debe ser igual a  $Va^2$ . Así la función corriente  $\psi$  para flujo alrededor de un cilindro circular se puede expresar como:

$$\psi = Vr \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{a} \right)$$

Y el potencial de velocidad correspondiente es:

$$\phi = Vr \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Luego sumando el potencial complejo de la corriente rectilínea más el potencial complejo del doblete más el potencial complejo del vórtice obtendremos el potencial complejo para un cilindro con circulación que lo emplearemos más adelante en el método de Lighthill.

$$F(Z) = VZ + C \quad \text{Potencial complejo de la Corriente rectilinea}$$

$$F(Z) = \frac{M}{Z} + C \quad \text{Potencial complejo del Doblete}$$

$$F(Z) = K \ln Z + C \quad \text{Potencial complejo para el Vortice}$$

$$F(Z) = VZ + \frac{M}{Z} + K \ln Z \quad \text{Sabemos que } M = Va^2 \text{ ( intensidad del doblete)}$$

$$\text{En el vórtice } \Gamma = \oint \mathbf{s} = 2\pi K$$

Potencial complejo para un cilindro con circulación:

$$F(Z) = V \left( Z + \frac{a^2}{Z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln Z$$



## **CAPÍTULO III**

### **CONCEPTOS GENERALES**

#### **3.0 AERODINAMICA**

Es una rama de la dinámica que trata del movimiento del aire (y los otros fluidos gaseosos) y las fuerzas resultantes actuando en sólidos en movimiento relativo a dicho fluido. Estudia y da cuenta de la interacción entre un Fluido y un cuerpo en movimiento.

#### **3.1 TEOREMA DE KUTTA - JOUKOWSKY**

Cuando a un cilindro con circulación se lo embiste con una corriente uniforme se generará una fuerza hacia arriba o hacia abajo según sea el signo de la circulación y que se le da el nombre de sustentación; a este fenómeno se le llama efecto MAGNUS.

Esta fuerza de sustentación (+) si es hacia arriba es proporcional a la velocidad de la corriente rectilínea uniforme y a la intensidad del torbellino (k).

Como vimos anteriormente en flujo potencial la velocidad en la superficie del cilindro con circulación , está dada por

$$V_q = -2V_{\infty} \text{Sen}\boldsymbol{q} + \frac{K}{a}$$

donde el primer sumando se debe a la componente de la velocidad sin perturbar ( $V_\infty$ ) y el segundo término se debe a la circulación

Observando la figura del cilindro con circulación, la presión en la superficie de este cilindro esta dada por

La componente horizontal que me dá arrastre en la superficie del cilindro está dado por esta expresión:

$$F_x = - \int_0^{2p} P_s \cos \mathbf{q} ds$$

Y la componente vertical que me dá sustentación está dada por:

$$F_y = - \int_0^{2p} P_s \sin \mathbf{q} ds$$

La presión  $P_s$  en la superficie del cilindro la calculamos a partir de la ecuación de Bernoulli:

$$P_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2} \mathbf{r} V_q^2$$

$$P_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 = P_s + \frac{1}{2} \mathbf{r} \left( -2V_\infty \sin \mathbf{q} + \frac{K}{a} \right)^2$$

$$P_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 = P_s + \frac{1}{2} \mathbf{r} \left[ 4V_\infty^2 \sin^2 \mathbf{q} - (2)(2V_\infty \sin \mathbf{q}) \left( \frac{K}{a} \right) + \left( \frac{K}{a} \right)^2 \right]$$

$$P_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 = P_s + \frac{1}{2} \mathbf{r} \left[ 4V_\infty^2 \sin^2 \mathbf{q} - 4V_\infty \sin \mathbf{q} \left( \frac{K}{a} \right) + \left( \frac{K}{a} \right)^2 \right]$$

$$P_\infty - P_s = -\frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 + \frac{1}{2} \mathbf{r} \left[ 4V_\infty^2 \sin^2 \mathbf{q} - 4V_\infty \sin \mathbf{q} \left( \frac{K}{a} \right) + \left( \frac{K}{a} \right)^2 \right]$$

$$P_\infty - P_s = \frac{1}{2} \mathbf{r} \left[ -V^2 + 4V_\infty^2 \sin^2 \mathbf{q} - 4V_\infty \sin \mathbf{q} \left( \frac{K}{a} \right) + \left( \frac{K}{a} \right)^2 \right]$$

$$P_\infty - P_s = \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 \left[ -1 + 4 \sin^2 \mathbf{q} - 4 \sin \mathbf{q} \left( \frac{K}{V_\infty a} \right) + \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \right]$$

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 \left[ 1 - 4 \sin^2 \mathbf{q} + 4 \sin \mathbf{q} \left( \frac{K}{V_\infty a} \right) - \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \right]$$

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2} \mathbf{r} V^2 \left[ 1 - 4 \sin^2 \mathbf{q} + 4 \left( \frac{K}{V_\infty a} \right) \sin \mathbf{q} - \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \right]$$

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 \left[ 1 - 4 \sin^2 \mathbf{q} + 4 \sin \mathbf{q} - \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \right]$$

La fuerza de sustentación  $\mathbf{L}$  en todo el cilindro con envergadura es:

$$F_y = L = - \int_0^{2p} P_s \text{ Sen}\mathbf{q} b \, ds$$

$$L = - \int_0^{2p} P_s \text{ Sen}\mathbf{q} b a \, d\mathbf{q}$$

$$L = - \int_0^{2p} (P_s - P_\infty) \text{ Sen}\mathbf{q} b a \, d\mathbf{q}$$

Reemplazamos nuestro  $\Delta P$  en **L**

$$L = - \int_0^{2p} (P_s - P_\infty) \text{ Sen}\mathbf{q} b a \, d\mathbf{q}$$

$$L = - \int_0^{2p} \frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 \left[ 1 - 4 \text{Sen}^2 \mathbf{q} + 4 \left( \frac{K}{V_\infty a} \right) \text{Sen}\mathbf{q} - \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \right] \text{Sen}\mathbf{q} b a \, d\mathbf{q}$$

Por propiedad, cualquier potencia impar del  $\text{Sen}\mathbf{q}$ , integrado de 0 a  $2\mathbf{p}$  es CERO.

$$L = - \int_0^{2p} \frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 \left[ \cancel{\text{Sen}\mathbf{q}} - 4 \cancel{\text{Sen}^3 \mathbf{q}} + 4 \left( \frac{K}{V_\infty a} \right) \text{Sen}^2 \mathbf{q} - \left( \frac{K}{V_\infty a} \right)^2 \cancel{\text{Sen}\mathbf{q}} \right] b a \, d\mathbf{q}$$

Luego:

$$L = - \int_0^{2p} \frac{1}{2} \mathbf{r} V_\infty^2 \left( \frac{4K}{V_\infty a} \right) b a \text{Sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

$$L = - \frac{1}{2} \mathbf{r} V \frac{4K}{Va} b a \int_0^{2p} \text{Sen}^2 \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

Luego de simplificar y desarrollar la integral nos queda:

$$L = -2 \mathbf{r} V K b (\mathbf{p})$$

$$L = -2\mathbf{p} \mathbf{r} V K b$$

$$L = -2\underbrace{\mathbf{p}K}_{\Gamma} \mathbf{r} V b$$

$$L = -\Gamma \mathbf{r} V b$$

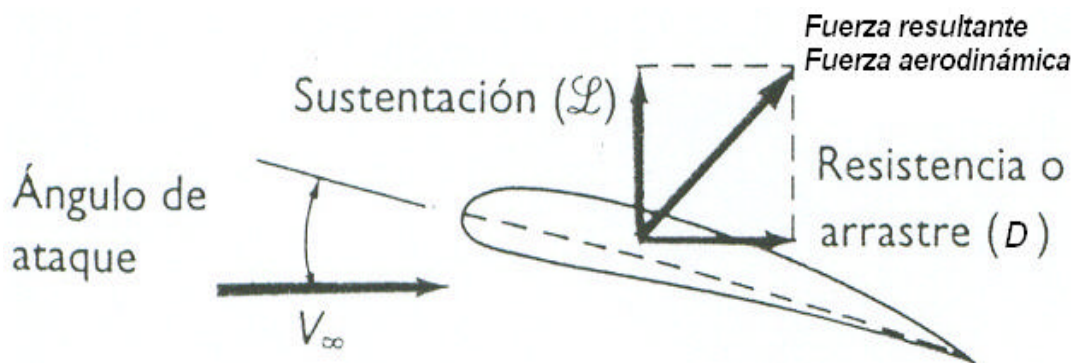
$$L = -\mathbf{r} V \Gamma b$$

$$\boxed{\frac{L}{b} = -\mathbf{r} V \Gamma} \text{ por unidad de envergadura.}$$

Observemos que la sustentación es independiente del radio “a” del cilindro.

### 3.2 LA SUSTENTACIÓN

La fuerza aerodinámica sobre un cuerpo se podría dividir en 2 componentes a lo largo de cualquier sistema arbitrario de ejes. Consideremos un cuerpo bidimensional y con simetría axial. Para el cuerpo bidimensional la fuerza resultante está en el plano XY. Para un cuerpo con simetría axial, la fuerza resultante está en el plano definido por el eje del cuerpo y el vector velocidad del flujo que se le aproxima. En ambos casos la componente de la fuerza en la dirección del flujo que se aproxima se conoce como resistencia al avance o arrastre, y la otra componente de la fuerza perpendicular al flujo que se aproxima se conoce como “Sustentación”.



Las fuerzas de sustentación no necesariamente se presentan en todos los flujos; solamente ocurren si existe asimetría. Tal podría estar causada por el cuerpo o por que el cuerpo y el flujo de aproximación no

estén alineados. El ángulo de no alineación se conoce como ángulo de ataque (  $\alpha$  ).

### **3.3 FUERZA DE ARRASTRE**

Todo perfil cuando se lo ataca con una corriente determinada siempre se va a presentar un vector normal a la corriente (sustentación) y un vector co – lineal con la corriente que se llama “ARRASTRE” (drag), las fuerzas de resistencia al avance.

Explicando mejor EL ARRASTRE es la fuerza que impide o retarda el movimiento de una aeronave, la resistencia o arrastre actúa de forma paralela y en la misma dirección que el viento relativo (flujo), aunque también podríamos afirmar que la resistencia al avance es paralela y de dirección opuesta a la trayectoria.

Desde el punto de vista aerodinámico, cuando un ala (perfil) se desplaza a través del aire hay dos tipos de resistencia: (a) resistencia debida a la fricción del aire sobre la superficie del ala, y (b) resistencia inducida por la presión del propio aire oponiéndose al movimiento de un objeto en su seno.

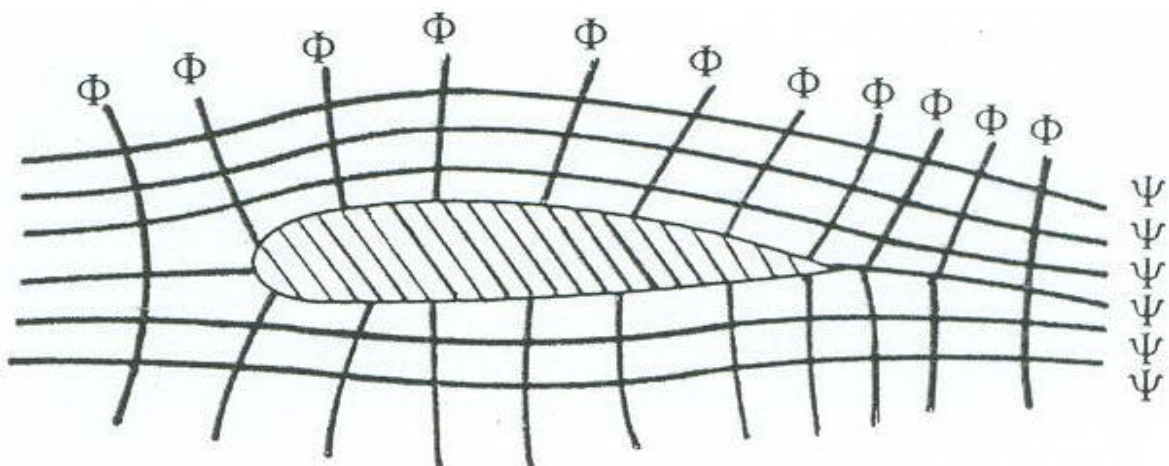
La resistencia por fricción es proporcional a la viscosidad, que en el aire es muy baja, de manera que en la mayoría de las veces esta resistencia es pequeña comparada con la producida por la presión; mientras que la resistencia debida a la presión (Inducida) depende de la densidad de la masa del aire. Ambas resistencias crean una fuerza proporcional del área sobre la que actúan y al cuadrado de la velocidad. Una parte de la resistencia por presión, que produce una ala , depende de la cantidad de sustentación producida, producida pero por efecto de velocidades inducidas en los extremos del ala; a esta parte se la denomina resistencia inducida, a la otra parte de la resistencia al avance es la dada por cualquier objeto pero que carezca de sustentación, a esta resistencia la llamamos resistencia PARÁSITA, el término parásito se debe a que esa resistencia es debida a la resistencia (resistencia al avance) de los elementos que carecen de sustentación.

### 3.4 MOMENTOS AERODINÁMICOS:

Ciencia aerodinámica que trata del giro de los cuerpos debido al embestimiento de un cuerpo por una corriente de fluido. El momento aerodinámico me produce un giro alrededor de un eje longitudinal y también produce movimientos angulares en los 3 ejes. Alrededor de estos 3 ejes se puede girar, eje x, eje y, eje z, el perfil, El avión, etc., giran alrededor de estos 3 ejes y de ahí salen tres momentos del giro, (1) Momento de derrape, (2) Momento de Cabeceo y (3) Momento longitudinal por eso que tiene 3 clases (de movimiento) y 3 momentos.

### 3.5 CONFIGURACIÓN FLUIDODINÁMICA

Nos permite gestar con las líneas de corriente y líneas equipotenciales “modelos matemáticos” que respondan a una situación real, o sea la configuración fluidodinámica nos permite que con ciencia (teoría) podamos describir un fenómeno y dar respuesta a una situación real; nos permite visualizar el fenómeno real.

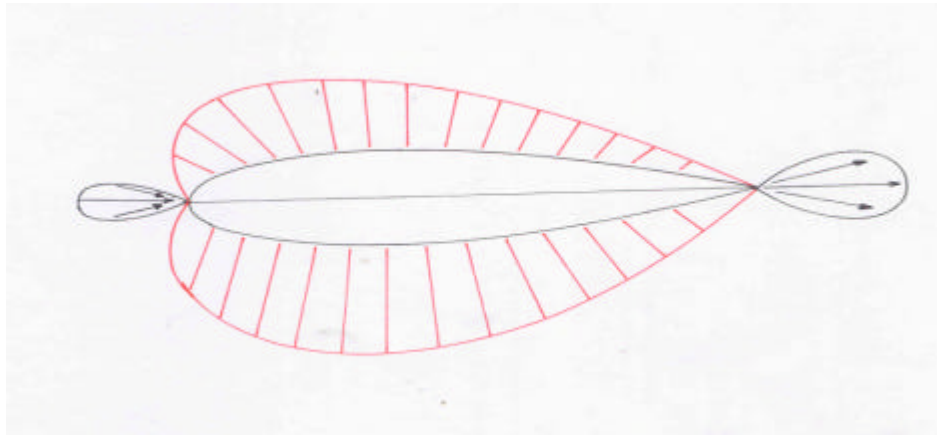


*Configuración Fluidodinámica de un perfil aerodinámico*

#### 3.5.1 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES

La distribución de presiones son todas las presiones a lo largo de la cuerda, por ejemplo al 0 % de la cuerda que presión tienes, al 14 %, al 20%, al 25 %, al 50 % de la cuerda que presión tienes, etc., pero distribuidas en el EXTRADOS y también en el INTRADOS.

Cuando se usa presiones positivas en el intradós y presiones negativas en el extradós son tan solo convencionalismos.



Pero realmente estas presiones (en el extradós) no son presiones negativas sino presiones positivas que están en dirección de arriba hacia abajo y (en el intradós) las presiones también son positivas sino que están en dirección de abajo hacia arriba, estas presiones son mucho más grandes que las presiones en el extradós por lo tanto la resultante se va a dar hacia arriba, solamente por eso.

### 3.5.2 DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES:

Se calculan las velocidades a lo largo de la cuerda por BERNOULLI teniendo las presiones.

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z = Cte}$$



o sea teniendo presión se despeja la velocidad en un punto determinado.

### 3.6 PRIMER TEOREMA DE BLASIUS

Es utilizado para hallar las características aerodinámicas donde se puede hallar la fuerza en un perfil dada por la siguiente relación

$$F = \frac{i}{2} \oint \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz$$

Donde vemos que es igual a la parte imaginaria de rho medios por la integral curvilínea de la velocidad de cambio de  $f(z)$  en el plano de transformación elevada al cuadrado por el diferencial de  $z$ .

### 3.7 SEGUNDO TEOREMA DE BLASIUS

Lo utilizamos para la determinación del momento aerodinámico de los perfiles, en función del potencial complejo del cilindro con circulación.

En sí el momento viene a ser el producto de  $(-\tilde{\Gamma}/2)$  por la parte real de la integral curvilínea cerrada de la velocidad compleja en el plano de transformación o perfil al cuadrado, multiplicado por la función de transformación ( $z$ ) y por su respectivo diferencial ( $dz$ )

$$M_0 = -\frac{\Gamma}{2} \oint \left[ \frac{df(z)}{dz} \right]^2 z dz$$

### 3.8 INTEGRAL DE POISSON

$$g(h_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(q) \cot\left(\frac{q-q_0}{2}\right) dq$$

Sirve para calcular la conjugada armónica de una función compleja  $g(\mathbf{q})$  y es igual a la inversa de dos veces  $\partial$  y por la integral entre cero y  $2\pi$  del logaritmo natural del módulo de la velocidad de ataque a un ángulo alfa igual a cero ( $g(\mathbf{q})$ ) por la cotangente de la semi diferencia de  $\theta$  y  $\theta_0$  todo por el diferencial de theta.

### 3.9 OPERADORES DE GERMAIN

Lo utilizamos como una forma de hallar la conjugada armónica de una función de variable compleja. Utilizaremos operadores de 1ra categoría y 1ra especie.

Primera categoría: los que cumplen con:

$$A [\cos n \theta] = a_m \sin (m\theta)$$

$$A [\sin n \theta] = -a_m \cos (m\theta)$$

$$A [CTE] = 0$$

1ª especie son aquellos que usan  $2n$  puntos

2ª especie son aquellos que usan  $4n$  puntos

Segunda categoría

$$B [\cos n \theta] = b_m \cos (m\theta)$$

$$B [\sin n \theta] = b_m \sin (m\theta)$$

$$B [CTE] = 0$$

1ª especie son aquellos que usan  $2n$  puntos

2ª especie son aquellos que usan  $4n$  puntos

En nuestro caso utilizamos operadores de 1ra categoría y de 1ra especie.

## CAPITULO IV

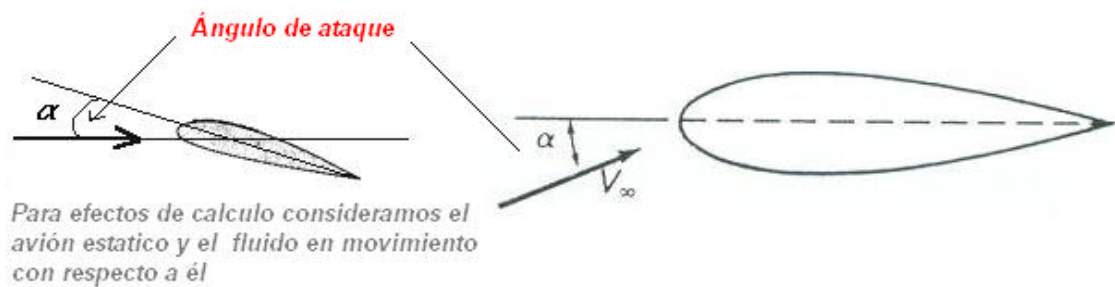
### PERFILES AERODINAMICOS

Son elementos empleados en las aplicaciones aerodinámicas

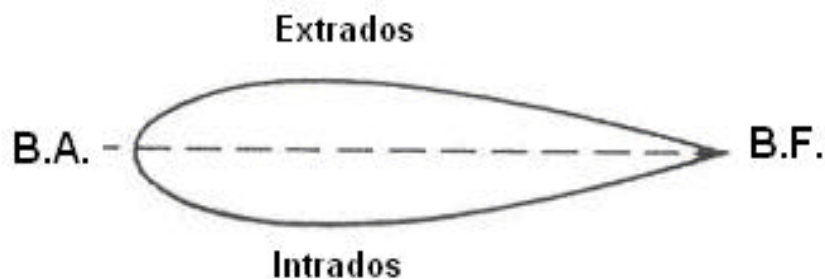
**4.0 PERFIL AERODINÁMICO** : Son elementos contituidos para generar fuerzas empleando un fluido que bordea dicho elemento.

#### 4.1 LOS PRINCIPALES ELEMENTOS DE UN PERFIL AERODINÁMICO

**4.1.1 ANGULO DE ATAQUE ( $\alpha$ )** : Es el ángulo formado por su cuerda con la dirección del viento relativo.

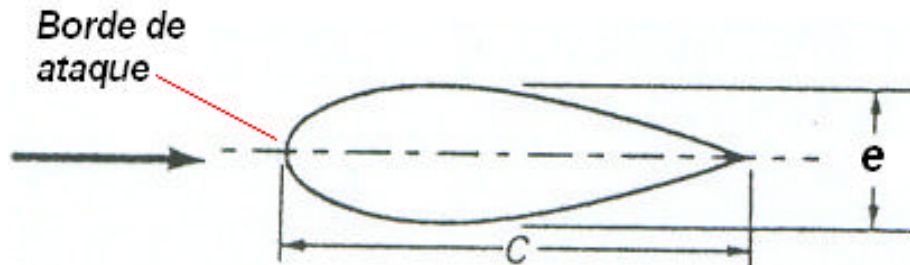


**4.1.2 EXTRADOS** : Se llama extradós de un perfil a la línea superior del contorno que une el borde de ataque con el borde de Fuga.



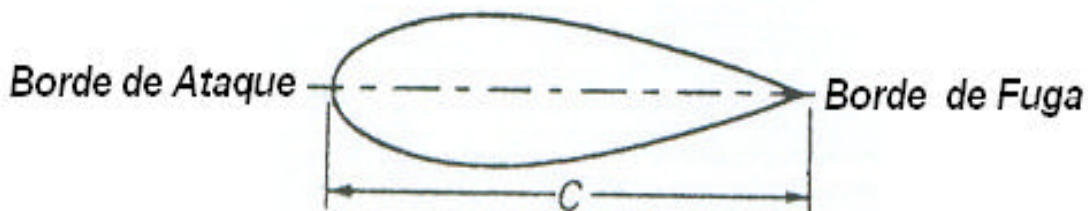
**4.1.3 INTRADOS** : Se llama intradós a la línea inferior del contorno que une el punto del borde de ataque con el punto del borde de fuga.

**4.1.4 ESPESOR (e) :** El espesor de un perfil es la separación o altura máxima, perpendicular a la cuerda, entre el extradós y el intradós. La posición del espesor máximo del perfil se expresa en tanto por ciento de la cuerda a partir del borde de ataque.



**4.1.5 BORDE DE FUGA O BORDE DE SALIDA (S) :** Se llama así , a la punta o borde trasero del perfil, o sea, por donde el viento relativo se aleja del perfil.

**4.1.6 BORDE DE ATAQUE (a) :** Es el lugar donde el perfil recibe al viento relativo.

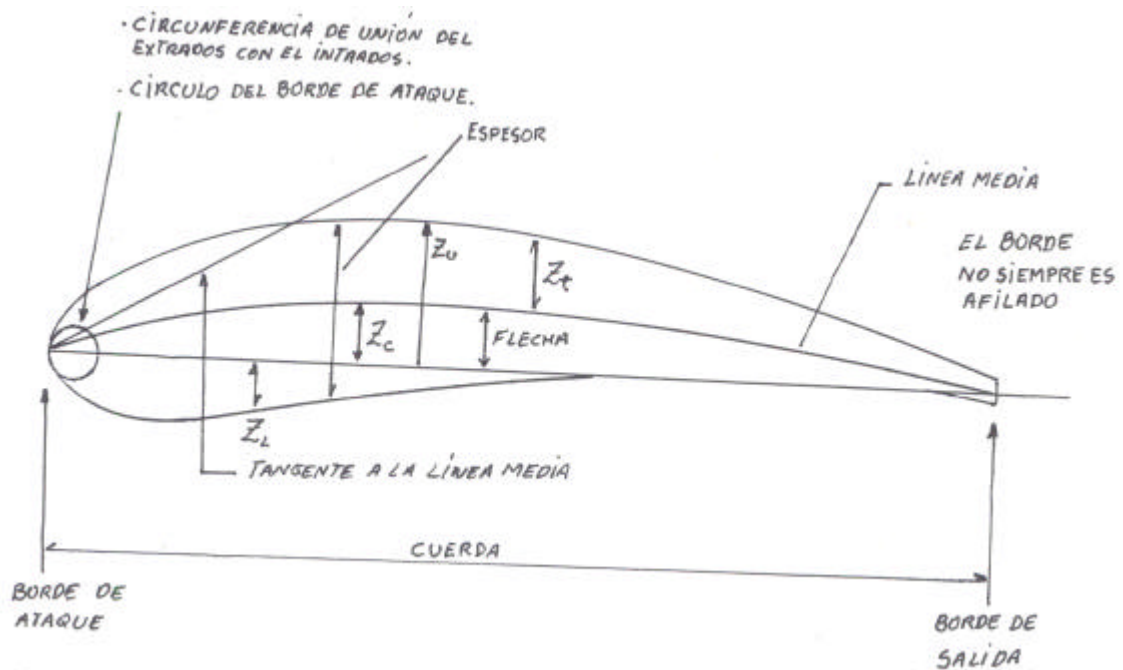


**4.1.7 CUERDA ( C ) :** Llamamos cuerda o profundidad de un perfil a la distancia entre el borde de ataque y el borde de fuga, que es la línea recta más grande que puede trazarse en un perfil.

**4.1.8 LINEA MEDIA :** Es el lugar geométrico que equidista del intradós y el extradós.

**4.1.9 FLECHA MÁXIMA (f) :** El punto de la línea media que se encuentra a mayor distancia de la cuerda , se lo llama flecha máxima o curvatura máxima

## 4.2 GEOMETRIA DE LOS PERFILES



### 4.2.1 PRINCIPALES RELACIONES GEOMETRICAS

$$Z_c = \frac{(Z_u + Z_l)}{2} \quad Z_u = (Z_c + Z_t)$$

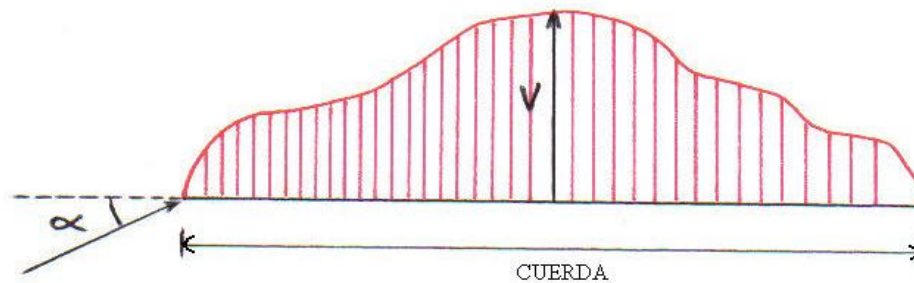
$$Z_t = \frac{(Z_u - Z_l)}{2} \quad Z_l = (Z_c - Z_t)$$

## CAPITULO V

### 5.0 MÉTODO Lighthill

En este capítulo tratamos y desarrollamos el método Lighthill que sirve para generar perfiles, diseñados con ciertas características introductorias, dando como datos parámetros dinámicos que el investigador mismo establezca.

Pues el método lighthill es un método analítico, científico, que sirve para diseñar, perfiles aerodinámicos solo con un simple dato: "la distribución de velocidades a lo largo de la cuerda", pero ésta distribución de velocidades se da a un ángulo de ataque cualquiera " $\alpha$ ".



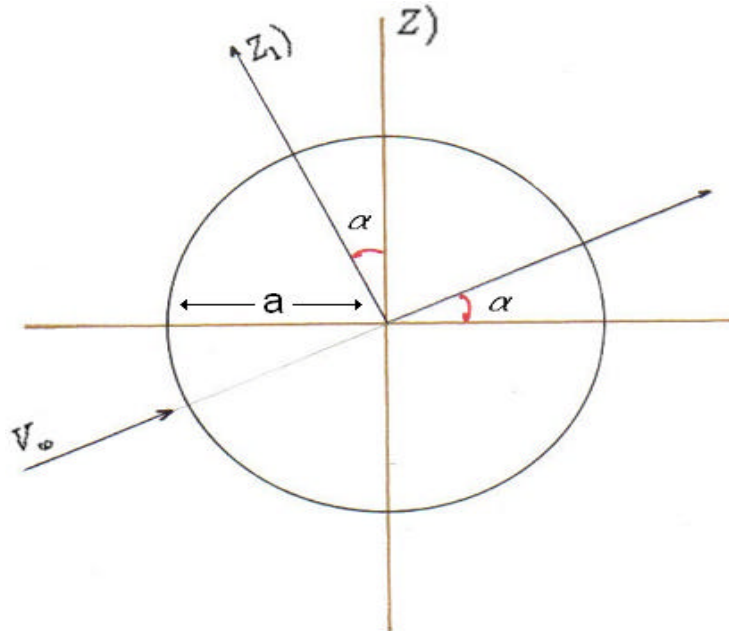
Explicándonos mejor: si tenemos una distribución de velocidades a lo largo de la cuerda, "esa" distribución de velocidades es nuestro dato, con ese dato y el método Lighthill obtenemos el perfil. La distribución de velocidades a lo largo de la cuerda es fundamental; por ejemplo tenemos una cuerda y tenemos una ley de distribución, esa ley de distribución que corresponde a un ángulo de ataque determinado puede ser  $5^\circ$  porque para  $7^\circ$  va a cambiar, para  $10^\circ$  va a cambiar (la ley de distribución de velocidades), para un ángulo determinado tenemos "una ley de distribución" a lo largo de la cuerda y con ese dato y el método de lighthill directamente nos va a generar un perfil perfecto.

Ahora si nosotros cambiamos la distribución de velocidades, cambia el perfil, es otro perfil !! . Por eso tenemos que definir primero a que ángulo vamos a trabajar.

Por ejemplo hemos visto las turbinas Pelton, Francis, tienen un inyector de chorro al rodete, éste hace un ángulo de ataque determinado, entonces ese es el ángulo que tenemos que poner para que finalmente aplicar el método de Lighthill y obtener la pala (alabe), el perfil, y ese ángulo de ataque es constante, todas las palas van a

tener el mismo ángulo de ataque, entonces diríamos “este es el perfil de aquí” obtenido científicamente.

Supongamos que tenemos un cilindro con circulación embestido con una corriente a un ángulo de ataque "***a***" determinado en el plano complejo



haciendo la siguiente transformación :

$$Z = Z_1 e^{ia}$$

***a*** ← Radio del cilindro con circulación

***Z*** ← Función de variable compleja

***e<sup>ia</sup>*** ← Función exponencial compleja

***Z<sub>1</sub>*** ← Función de variable compleja - girado un ángulo ***a***

Pues vamos a transformar una función analítica (función que debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Laplaciano) de variable compleja en el *plano* ***Z***, empezamos en el *plano* ***Z<sub>1</sub>*** y lo transformamos a un *plano* ***Z***, a través de un interfaz, ó de un intermediario como lo es : "la función de transformación conforme".

Conociendo el potencial complejo del cilindro con circulación:

$$f(Z_1) = V \left( Z_1 + \frac{a^2}{Z_1} \right) + \frac{i\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} \text{Ln } Z_1$$

reemplazamos:

$$Z = Z_1 e^{ia}$$

Acomodando convenientemente los términos

$$\begin{cases} Z = Z_1 e^{ia} \\ Z_1 = \frac{Z}{e^{ia}} \\ Z_1 = Z e^{-ia} \end{cases}$$

y reemplazando adecuadamente en el potencial complejo del cilindro con circulación obtenemos

$$f(Z) = V \left( Z e^{-ia} + \frac{a^2}{Z e^{-ia}} \right) + \frac{i\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} \text{Ln}(Z e^{-ia})$$

luego ordenando términos y desarrollando el término logarítmico, nos queda

$$f(Z) = V \left( Z e^{-ia} + \frac{a^2}{Z} e^{ia} \right) + \frac{i\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} [\text{Ln} Z - ia]$$

Hallamos la velocidad compleja de la función  $f(Z)$  en el *plano*  $Z$ , aplicamos

$$\frac{d f(Z)}{d Z}$$

Nuestra velocidad compleja:  $\frac{d f(Z)}{d Z}$

la representamos por  $\mathbf{W}(Z)$

$$\text{Así: } \mathbf{W}(Z) = \frac{Df(Z)}{DZ} = V \left( e^{-ia} - \frac{a^2}{Z^2} e^{ia} \right) + \frac{i\mathbf{s}}{2\mathbf{p}} \cdot \frac{1}{Z}$$

La velocidad en el Plano del perfil  $V_p$  es igual a:



$$V_p = \frac{df(Z)}{d\mathbf{z}} \quad (\text{Velocidad de cambio de } f(Z) \text{ en el plano de transformacion } \mathbf{z})$$

Multiplicando y dividiendo por  $dZ$  y acomodando términos convenientemente (regla de la cadena).

$$V_p = \frac{df(Z)}{d\mathbf{z}} = \frac{df(Z)}{dZ} \cdot \frac{dZ}{d\mathbf{z}}$$

Llamando  $q_a$  al módulo de la Velocidad del perfil

$$|V_p| = q_a \quad \leftarrow \quad \text{módulo de la velocidad del perfil}$$

Sabemos que el módulo de la velocidad es igual al producto del módulo de cambio en el

cilindro  $\left(\frac{dF}{dZ}\right)$ , por el módulo del cambio de  $Z$  respecto del perfil  $\left|\frac{dZ}{d\mathbf{z}}\right|$ .

$$|V_p| = q_a = \left|\frac{df(Z)}{dZ}\right|_a \cdot \left|\frac{dZ}{d\mathbf{z}}\right|_{cil}$$

y para un ángulo de ataque  $\alpha = 0$ .

El módulo de la velocidad quedará:

$$q_0 = \left|\frac{df(Z)}{dZ}\right|_0 \cdot \left|\frac{dZ}{d\mathbf{z}}\right|_{cil}$$

siendo el primer factor  $\left|\frac{df(Z)}{dZ}\right|_0$ , el cambio de  $f(Z)$  respecto de  $Z$  en el plano del

cilindro para un ángulo de ataque CERO y el 2do factor  $\left|\frac{dZ}{d\mathbf{z}}\right|_{cil}$  es el cambio de

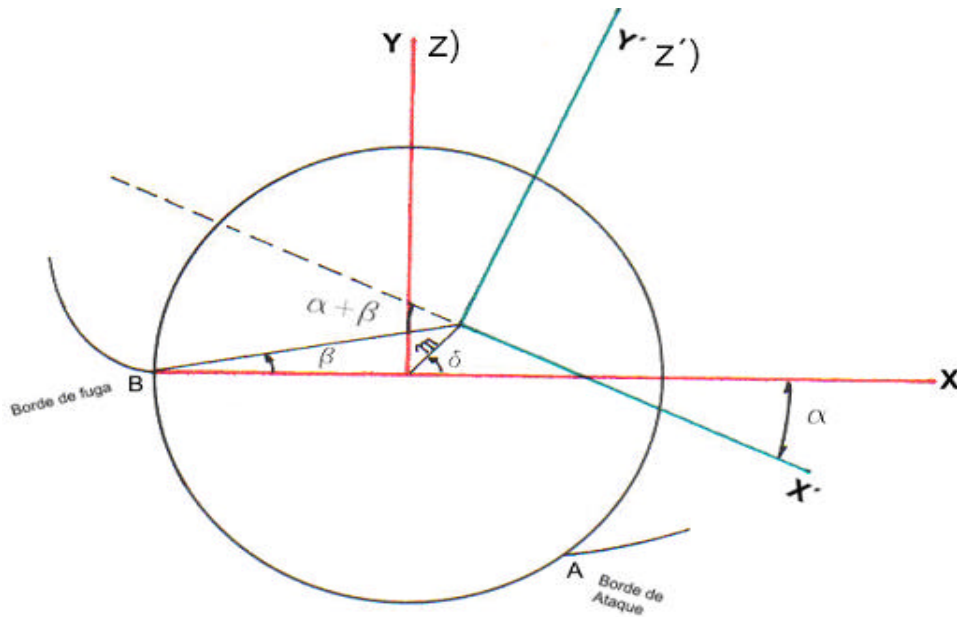
transformación en el plano del perfil.

Y dividiendo entre  $q_a$  para obtener una relación adimensional, obtendremos lo siguiente:

$$\frac{q_0}{q_a} = \frac{\left| \frac{df(Z)}{dz} \right|_0}{\left| \frac{df(Z)}{dz} \right|_a}$$

Relación a un ángulo de ataque cero grados respecto a un ángulo de ataque cualquiera  $\alpha$ .

El valor de la circulación " $\mathbf{S}$ " no puede ser una circulación cualquiera, para una transformación general donde el sistema tiene corrimiento y giro.



$$\left. \frac{df(Z)}{dz_1} \right)_{z_1 = B = -ae^{i(a+b)}} = 0 \quad (\text{En el punto de remanso})$$

$$\frac{df(Z)}{dz_1} = -V \left( 1 - \frac{a^2}{Z_1^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\mathbf{p}} \cdot \frac{1}{Z_1} = 0 \quad \dots [1]$$

↑

"-" por que la velocidad está en sentido contrario al eje de ataque.

$$\frac{df(Z)}{dz_1} = 0 \quad \begin{cases} \text{en el punto de remanso} \\ \text{es igual a cero.} \end{cases}$$

Vemos que  $Z_B = Z_1 = -ae^{i(a+b)}$  ( transformación )

sustituyendo  $Z_1 = -ae^{i(a+b)}$  en [1]

obtenemos:

$$\frac{df(Z)}{dz_1} = -V \left( 1 - \frac{a^2}{a^2 e^{2i(a+b)}} \right) + \frac{i\mathbf{S}}{2\mathbf{p}a} \cdot \frac{1}{e^{i(a+b)}} = 0 \quad \dots [2]$$

Acomodando términos en [2] :

$$\frac{i\mathbf{S}}{2\mathbf{p}ae^{i(a+b)}} = V \left( 1 - \frac{a^2}{a^2 e^{2i(a+b)}} \right)$$

Despejando la circulación:

$$i\mathbf{S} = V \left( 1 - \frac{1}{e^{2i(a+b)}} \right) 2\mathbf{p}ae^{i(a+b)}$$

Aplicando el respectivo artificio:

$$\mathbf{S} = \frac{V}{i} (1 - e^{-2i(a+b)}) 2\mathbf{p}ae^{i(a+b)} \times \frac{i}{i}$$

Sabemos que  $i^2 = -1$  , por lo que nos quedará:

$$\mathbf{S} = -Vi (1 - e^{-2i(a+b)}) 2\mathbf{p}ae^{i(a+b)}$$

Operando y multiplicando y dividiendo por  $2i$

$$\mathbf{S} = -2\mathbf{p}Vai(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) \times \frac{2i}{2i}$$

Llegamos a lo siguiente:

$$\mathbf{S} = 4\mathbf{p}Va \left( \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} \right) \dots \dots [3]$$

Sabemos que por funciones trigonométricas en términos de las funciones exponenciales, se tiene que:

$$\text{Sen}Z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \text{Cos}Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{luego: } 2i \text{sen}Z = e^{iz} - e^{-iz} \dots (*)$$

Sustituyendo (\*) en [3] obtenemos:

$$\mathbf{S} = 4\mathbf{p}Va \text{Sen}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

entonces para un perfil simétrico que es nuestro caso, beta se hace cero  $\mathbf{b} = 0$ , y queda:

$$\boxed{\mathbf{S} = 4\mathbf{p}Va \text{Sen}(\mathbf{a})}$$

En una transformación en el cilindro, un punto cualquiera de él debe cumplir la siguiente relación:

$$Z_c = ae^{iq}$$

La velocidad del cilindro  $\mathbf{W}(Z)_c$ , será ésta:

$$\mathbf{W}(Z)_c = V \left( e^{-ia} - \frac{a^2 e^{ia}}{a^2 e^{2iq}} \right) + i \frac{4pVaSena}{2p} \cdot \frac{1}{ae^{iq}}$$

$$\mathbf{W}(Z)_c = V (e^{-ia} - e^{ia} e^{-2iq}) + 2iVSena e^{-iq} \dots [4]$$

Pero sabemos que:  $Sena = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$

$$\Rightarrow 2iSena = e^{ia} - e^{-ia}$$

Sustituyendo en [4] (ya con los términos acomodados)

$$\mathbf{W}(z)_c = V (e^{-ia} - e^{ia} e^{-2iq}) + Ve^{-iq} 2iSena$$

$$\mathbf{W}(z)_c = V (e^{-ia} - e^{ia} e^{-2iq}) + Ve^{-iq} (e^{ia} - e^{-ia})$$

$$\mathbf{W}(z)_c = Ve^{-iq} [ e^{-ia} e^{iq} - e^{ia} e^{-iq} + e^{ia} - e^{-ia} ]$$

$$\mathbf{W}(z)_c = Ve^{-iq} [ e^{\frac{1}{2}iq} (e^{-ia} e^{\frac{q}{2}} + e^{ia} e^{-\frac{q}{2}}) - e^{-\frac{1}{2}iq} (e^{-ia} e^{\frac{1}{2}q} + e^{ia} e^{-\frac{q}{2}}) ]$$

$$\mathbf{W}(z)_c = Ve^{-iq} [ (e^{-ia} e^{\frac{q}{2}} + e^{ia} e^{-\frac{q}{2}}) (e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}}) ]$$

$$\mathbf{W}(z)_c = Ve^{-iq} [ (e^{\left(\frac{q}{2}-a\right)} + e^{\left(\frac{q}{2}-a\right)}) (e^{\frac{q}{2}} - e^{-\frac{q}{2}}) ] \dots [5]$$

Sabemos que:  $\cos Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$

y  $2iSena = e^{ia} - e^{-ia}$

Aplicando lo antes mencionado en [5]

$$\begin{cases} e^{\left(\frac{q}{2}-a\right)} + e^{-\left(\frac{q}{2}-a\right)} = 2\cos\left(\frac{q}{2}-a\right) \\ e^{i\frac{q}{2}} - e^{-i\frac{q}{2}} = 2i\sin\frac{q}{2} \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\mathbf{W}(z)_c = Ve^{-iq} \left[ 2\cos\left(\frac{q}{2}-a\right) \right] \left[ 2i\sin\frac{q}{2} \right]$$

Operando nos queda:

$$\mathbf{W}(z)_c = 4iVe^{-iq} \cdot \cos\left(\frac{q}{2}-a\right) \sin\frac{q}{2} \quad \{\text{Velocidad del Cilindro}\}$$

Sacando módulo a la velocidad

$$a \neq 0 \quad |\mathbf{W}(Z)|_c = 4V\cos\left(\frac{q}{2}-a\right) \sin\frac{q}{2} = q_a$$

$$a = 0 \quad |\mathbf{W}(Z)|_c = 4V\cos\left(\frac{q}{2}\right) \sin\frac{q}{2} = q_0$$

Relacionándolos quedará:

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{\cos(\frac{q}{2}-a) \sin\frac{q}{2}}{\cos\frac{q}{2} \sin\frac{q}{2}} \quad \text{Simplificando nos quedará :}$$

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{\cos(\frac{q}{2}-a)}{\cos\frac{q}{2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En esta relación con un} \\ \mathbf{a} \text{ cualquiera puedo pasar} \\ \text{a un } \mathbf{a} = 0 . \end{array} \right.$$

Y esto nos va a servir solamente para ver a qué es igual el  $q_0$  en función de los desplazamientos en el perfil; veamos:

$$q_0 = \left| \frac{df(Z)}{dZ} \right| \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

$$q_0 = |\mathbf{W}(z)|_c^{a=0} \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

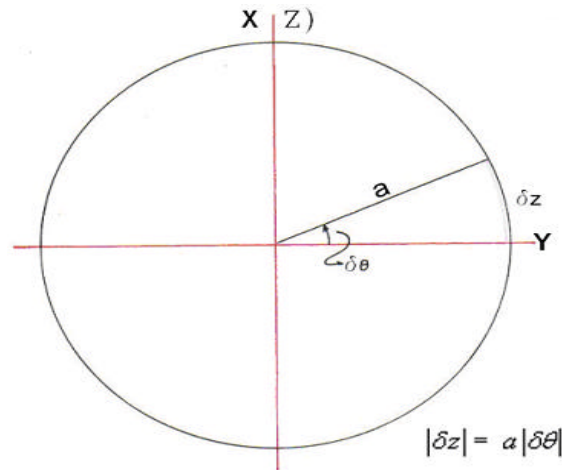
$$q_0 = 4V \sin\frac{q}{2} \cos\frac{q}{2} \left| \frac{dZ}{dz} \right|$$

Por funciones de arcos múltiples

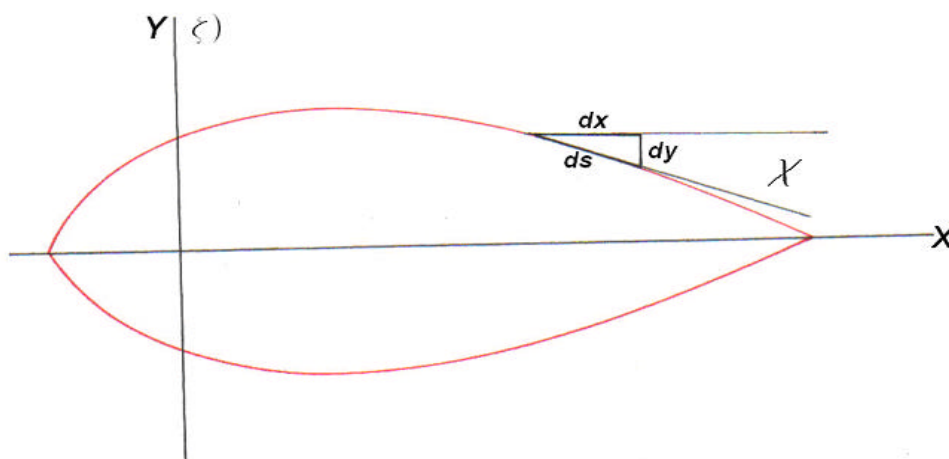
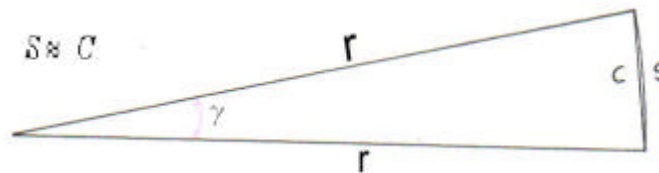
$$\text{Sen}2a = 2\text{Sen}a\text{Cosa}$$

Aplicando obtenemos finalmente:

$$q_0 = 2V\text{Sen}\boldsymbol{\eta} \frac{|dZ|}{|dz|} \dots [6]$$



en geometría: “Si el ángulo central es relativamente pequeño, se puede tomar la longitud de arco, como un valor aproximado de la longitud de cuerda correspondiente”.



$$dx = ds\text{Cos}\boldsymbol{\epsilon}$$

$$dy = ds\text{Sen}\boldsymbol{\epsilon}$$

$$\overline{dx - idy} = ds\text{Cos}\boldsymbol{\epsilon} - ids\text{Sen}\boldsymbol{\epsilon}$$

$$d\mathbf{z} = dx - i dy$$

$$d\mathbf{z} = ds \cos \mathbf{c} - i ds \sin \mathbf{c}$$

$$d\mathbf{z} = ds (\cos \mathbf{c} - i \sin \mathbf{c})$$

$$d\mathbf{z} = ds e^{-i\mathbf{c}}$$

$$|d\mathbf{z}| = ds$$

Regresando nuevamente a la ec. [6] :

$$q_0 = 2V \sin \mathbf{q} \frac{|dZ|}{|d\mathbf{z}|}$$

$$q_0 = 2V \sin \mathbf{q} \frac{ad\mathbf{q}}{ds}$$

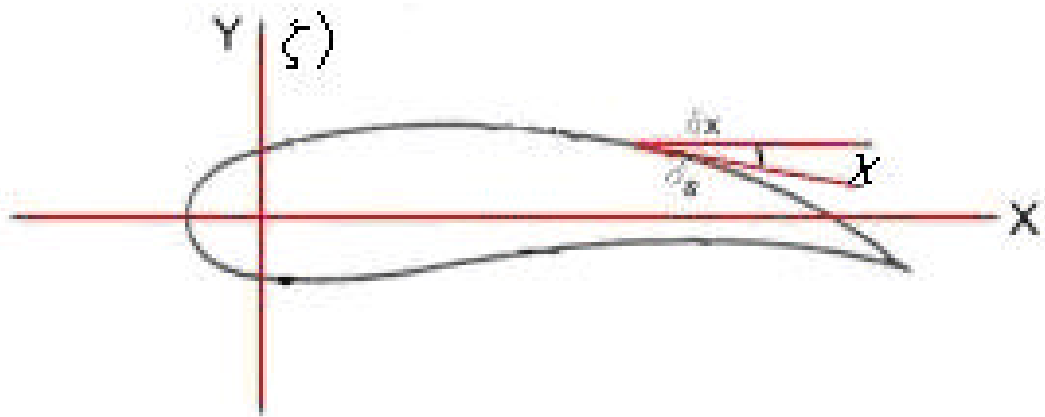
$$ds = 2V \sin \mathbf{q} \frac{ad\mathbf{q}}{q_0}$$

$$ds = \frac{2Va}{q_0} \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

$$ds = \frac{2Va}{q_0} d(\cos \mathbf{q}) \quad \dots [7]$$

multiplicando ambos miembros por  $\cos \mathbf{c}$  :

$$ds \cos \mathbf{c} = \frac{2Va}{q_0} \cos \mathbf{c} d(\cos \mathbf{q})$$



del gráfico se desprende que:

$$dx = ds \cos \mathbf{c}$$

Y también se deduce:  $dy = ds \sin \mathbf{c}$

Luego sabemos que :  $dx = ds \cos \mathbf{c}$

Por lo cual obtenemos:

$$dx = ds \cos \mathbf{c} = \frac{2Va}{q_0} \cos \mathbf{cd} (\cos \mathbf{q}) \dots [8]$$

Ahora para  $dy = ds \sin \mathbf{c}$  operamos de igual forma con la ec.[7]:

$$\sin \mathbf{c} ds = \sin \mathbf{c} \frac{2Va}{q_0} d(\cos \mathbf{q})$$

$$dy = \sin \mathbf{c} ds = \sin \mathbf{c} \frac{2Va}{q_0} d(\cos \mathbf{q}) \dots [9]$$

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{2Va}{q_0} \cos \mathbf{cd} (\cos \mathbf{q}) \dots [8] \\ dy &= \frac{2Va}{q_0} \sin \mathbf{cd} (\cos \mathbf{q}) \dots [9] \end{aligned} \right\} \begin{array}{|l} \text{Cuando conozcamos } q_0 \text{ y } \mathbf{c} \\ \text{en función de theta, } \mathbf{q}, \\ \text{se podrá hallar x e y.} \end{array}$$

Vamos ahora a encontrar  $q_0$  en función de  $\mathbf{q}$ , para esto tenemos que la función de transformación es:

$$\mathbf{z} = Z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dz} = 1 - \frac{b_1}{Z^2} - \frac{2b_2}{Z^3} - \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Observamos que no tiene residuo; por la razón} \\ \text{que no está presente el término } Z^1. \end{array} \right\}$$

Y por la integral de Cauchy:

$$\oint \frac{d\mathbf{z}}{dZ} \cdot dZ = 0$$

$$\oint \frac{d\mathbf{z}}{df(Z)} \cdot \frac{df(Z)}{dZ} \cdot dZ = 0$$

Supongamos que  $\frac{d\mathbf{z}}{df(Z)}$  es el desarrollo en

serie de la siguiente forma:



$$\frac{dz}{dF} = 1 + \frac{C_1}{Z} + \frac{C_2}{Z^2} + \dots$$

y para que la integral de Cauchy sea cero,  $\oint_{cauchy} = 0$  se debe cumplir que  $C_1 = 0$ .

$$\rightarrow \frac{dz}{dF} = 1 + \frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots$$

por lo tanto tomando logaritmos:

$$\text{Ln}\left(\frac{dz}{dF}\right) = \text{Ln}\left(1 + \frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots\right)$$

Ahora sabiendo que matemáticamente en desarrollos de series se cumple:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Se puede aplicar a lo siguiente:

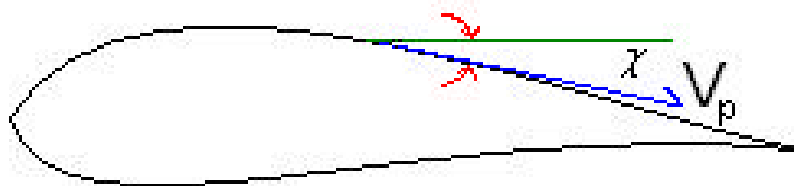
$$\ln\left(\frac{dz}{dF}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots}_{\mathbf{C}}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots\right) = \underbrace{\left(\frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots\right)}_{\mathbf{C}} - \frac{\left(\frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots\right)^3}{3} - \dots$$

$$\mathbf{C} - \frac{\mathbf{C}^2}{2} + \frac{\mathbf{C}^3}{3} - \dots$$

Pero además:

$$q_a = |V_p| = \left(\frac{dF}{dz}\right) = q_0 e^{-ix} \dots [10]$$



De antemano sabemos nosotros que:

$$e^{ij} = \cos \mathbf{j} + i \sin \mathbf{j}$$

$$e^{-ij} = \cos \mathbf{j} - i \sin \mathbf{j}$$

entonces aplicamos en [10]:

$$V_p = q_0 \cos \mathbf{c} - i q_0 \sin \mathbf{c}$$

$$V_p = q_0 (\cos \mathbf{c} - i \sin \mathbf{c})$$

$$\boxed{V_p = q_0 e^{-ix}}$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$\ln(V_p) = \ln(q_0 e^{-ix})$$

$$\ln\left(\frac{df(Z)}{dz}\right) = \ln(q_0 e^{-ix})$$

$$\ln\left(\frac{df(Z)}{dz}\right) = \ln q_0 - ix$$

Invirtiéndolo: (pues lo que realmente necesitamos es la inversa)

$$\ln\left(\frac{dz}{df(Z)}\right) = -\ln q_0 + ix \quad \dots [11]$$

Sustituyendo:

$$\ln\left(\frac{dz}{df(Z)}\right) = \frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots$$

En [11] :

$$\frac{C_2}{Z^2} + \frac{C_3}{Z^3} + \dots = -\ln q_0 + ix$$

Aplicando la transformación:  $z = ae^{iq}$

$$\frac{C_2}{a^2} e^{-2iq} + \frac{C_3}{a^3} e^{-3iq} + \dots = -\ln q_0 + ix$$

Llevando cada término complejo a su forma polar:

$$\frac{C_2}{a^2}(\cos 2\mathbf{q} - i \operatorname{sen} 2\mathbf{q}) + \frac{C_3}{a^3}(\cos 3\mathbf{q} - i \operatorname{sen} 3\mathbf{q}) + \dots = -\operatorname{Ln} q_0 + i \mathbf{c}$$

Vemos que la parte real es función de Coseno de  $2\mathbf{q}, 3\mathbf{q}, \dots$  y el  $\mathbf{c}$  es función del seno de  $2\mathbf{q}, 3\mathbf{q}, \dots$

En otras palabras:

$$\text{La parte real: } -\ln q_0 = F(\cos n\mathbf{q}) \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{Y la parte imaginaria: } \mathbf{c} = F(\operatorname{sen} n\mathbf{q}); \quad \forall n \geq 2$$

Identificando, reconociendo parte real e imaginaria:

$$-\ln q = C_2 a^{-2} (\operatorname{Cos} 2\mathbf{q} + \dots)$$

$$\mathbf{c} = -C_2 a^{-2} (\operatorname{Sen} 2\mathbf{q} + \dots)$$

El término que más me interesa es  $\frac{C_2}{a^2} (\operatorname{Cos} 2\mathbf{q} + i \operatorname{Sen} 2\mathbf{q})$  por que es el menor theta :

$2\mathbf{q}$ .

Ya que, nuestro verdadero interés es “A PARTIR DE QUE VALOR SE TOMA EL ÁNGULO  $\mathbf{q}$ ”.

Consideramos que el desarrollo en series de FOURIER de cualquier función  $g(\mathbf{q})$  es:

$$g(\mathbf{q}) = - \left[ a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} n\mathbf{q} + b_n \operatorname{Sen} n\mathbf{q}) \right]$$

Aplicando este concepto a la velocidad tendríamos :

$$-\operatorname{Ln} q_0 = - \left[ a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} n\mathbf{q} + b_n \operatorname{Sen} n\mathbf{q}) \right] ; \quad \text{pero vemos que en nuestro desarrollo}$$

aparece el  $n \geq 2$  por que los términos de nuestra serie comienzan a partir de  $2\mathbf{q}$ .

Además notamos que se debe cumplir:

$$C_1 = 0 \quad \text{por condición de Cauchy}$$

Aquí hacemos un paralelo:

$$a_n \operatorname{Cos} n\mathbf{q} \quad \text{con} \quad C_2 a^{-2} (\operatorname{Cos} 2\mathbf{q} + \dots)$$

$$b_n \text{ Sen } n\mathbf{q} \text{ con } -C_2 a^{-2} (\text{Sen} 2\mathbf{q} + \dots)$$

Aquí la parte real      Aquí la parte imaginaria

$$\left[ a_0 + \sum_1^{\infty} \left( \overset{\downarrow}{a_n \text{ Cos } n\mathbf{q}} + \overset{\downarrow}{b_n \text{ Sen } n\mathbf{q}} \right) \right]$$

(pero en serie de Fourier no hay parte real ni parte imaginaria.)

y comparando vemos que:  $-\ln q_0 = C_2 a^{-2} (\text{Cos} 2\mathbf{q} + \dots)$

$$-\ln q_0 = C_2 a^{-2} (\text{Cos} 2\mathbf{q} + \dots) = C_2 a^{-2} \text{Cos} 2\mathbf{q} + C_2 a^{-2} \text{Cos} 3\mathbf{q} + \dots$$

Observamos que todos los productos me dan en función de  $\mathbf{q}$ , por ello en el desarrollo no aparece ningún término independiente.

∴ El  $a_0$  en la fórmula de Fourier es CERO ( $a_0 = 0$ ) por que no existe ningún término independiente.

Igual para  $\mathbf{c} = -C_2 a^{-2} (\text{Sen} 2\mathbf{q} + \dots)$

$$\mathbf{c} = -C_2 a^{-2} (\text{Sen} 2\mathbf{q} + \dots) = -C_2 a^{-2} \text{Sen} 2\mathbf{q} - C_2 a^{-2} \text{Sen} 3\mathbf{q} - \dots$$

no aparece ningún término independiente.

Ahora  $\mathbf{b}_1$  ¿Por qué tiene que hacerse cero?

Por que en el desarrollo en la serie  $\mathbf{b}_1$  equivaldría a  $b_1 \cdot \text{Sen} 1\mathbf{q}$  y  $1\mathbf{q}$  no existe, por que los términos empiezan a partir de “2”. ( $n = 2$ ) ∴  $\mathbf{b}_1 = 0$

También observaremos que para  $a_n$  cuando  $n=1$  tendríamos que

$\text{Cos } n\mathbf{q}$  sería igual a  $\text{Cos } 1\mathbf{q} = \text{Cos } \mathbf{q}$  pero no hay  $\text{Cos } \mathbf{q}$ ; hay coseno a partir de  $2\mathbf{q}$ , entonces por esa razón es que el  $a_1$  también tiene que ser CERO,  $a_1 = 0$ .

Entonces como no hay estos términos  $\{a_0, b_1, a_1\}$  aquí, en el

$$\text{Desarrollo de la serie: } - \left[ a_0 + \sum_1^a (a_n \text{ Cos } n\mathbf{q} + b_n \text{ Sen } n\mathbf{q}) \right]$$

$$\text{entonces se tienen que anular } \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

y como el  $a_0$ , en el desarrollo de series de Fourier, es el término independiente, y está dado por FOURIER por esta expresión:  $\int_0^{2p} \ln q_0 d\mathbf{q}$ ; por lo tanto esta expresión es igual que  $a_0$  tiene que anularse:  $\int_0^{2p} \ln q_0 d\mathbf{q} = 0$

Los términos  $b_1$  y  $a_1$  también tienen su fórmula en FOURIER:

$$a_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

$$b_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q}$$

y al igual, o por las mismas razones que  $a_0$  tienen que anularse

$$a_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

$$b_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

Con esto comprobamos de que estas condiciones  $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$  se tienen que utilizar para

poder calcular el perfil.

Sintetizando:

$$a_0 = \int_0^{2p} \ln q_0 d\mathbf{q} = 0$$

$$a_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

$$b_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

Estas 3 condiciones tienen que cumplirse para que el perfil cierre.

Falta hallar  $\mathbf{c}$  en función de Theta ( $\mathbf{q}$ ); pero sabemos que  $\mathbf{c}$  y el módulo de la velocidad  $Lnq$  son conjugadas armónicas; luego, se podrá usar la  $\int$  de POISSON.

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_0^{2p} \ln q_0 \cot\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_0}{2}\right) d\mathbf{q}$$

Recurriendo a la relación de velocidades de un ángulo conocido “ $\mathbf{a} = 0$ ” a un ángulo cualquiera “ $\mathbf{a}$ ”:

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{\cos\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{a}\right)}{\cos\frac{\mathbf{q}}{2}}$$

aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$\ln\left(\frac{q_a}{q_0}\right) = \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{a}\right)}{\cos\frac{\mathbf{q}}{2}}\right)$$

desarrollando:

$$\ln q_a - \ln q_0 = \ln\left[\frac{\cos\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{a}\right)}{\cos\frac{\mathbf{q}}{2}}\right]$$

despejando  $\ln q_0$ :

$$\ln q_0 = \ln q_a - \ln\left[\frac{\cos(\mathbf{q}/2 - \mathbf{a})}{\cos\mathbf{q}/2}\right]$$

Hacemos el siguiente artificio: hacemos un cambio de numerador a denominador dentro del Corchete, lo que implica un cambio de signo en el término logarítmico.

$$\ln q_0 = \ln q_a + \ln\left[\frac{\cos\mathbf{q}/2}{\cos(\mathbf{q}/2 - \mathbf{a})}\right] \dots [12]$$

Aplicando conjugada armónica a ambos miembros:

$$C[\ln q_0] = C[\ln q_a] + C\left(\ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{a})} \right]\right)$$

El siguiente término:

$$C\left(\ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{a})} \right]\right)$$

lo definimos con ésta función:

$$\frac{2}{\mathbf{p}} \int_0^T \frac{\ln X}{X^2 - 1} dX = F(T)^\circ$$

A esto:  $\frac{2}{\mathbf{p}} \int_0^T \frac{\ln X}{X^2 - 1} dx$  lo llamamos  $F(T)$

Porque está en función de un parámetro T y para nuestro caso **T** es:

$$T = \tan \mathbf{a} \cdot \tan \frac{\mathbf{q}}{2} \quad \begin{cases} T = 0 \rightarrow F(T)^\circ = 0^\circ \\ T = \infty \rightarrow F(T)^\circ = 90^\circ \end{cases}$$

Todo esto:

$$\frac{2}{\mathbf{p}} \int_0^T \frac{\ln X}{X^2 - 1} dx \quad \begin{cases} \text{va a ser función de T} \\ \text{(en grados).} \end{cases}$$

Luego a la conjugada armónica de  $\ln q_0$  lo vamos a llamar **C**.

$$C(\ln q_0) = \mathbf{c}$$

A la conjugada armónica de  $\ln q_a$  lo llamaremos **C<sub>1</sub>**

$$C(\ln q_a) = \mathbf{c}_1$$

Y a  $F(T)$  lo llamaremos :  $C_2$

$$F(T)^o = C_2$$

Entonces:

$$C(\ln q_b) = C(\ln q_a) + F(T)^o$$

Sería lo mismo que escribir:

$$C = C_1 + C_2$$

Ahora hay un método que en lugar de aplicar

$$C = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \ln q_0 \cos\left(\frac{q - q_0}{2}\right) dq \quad \{\text{Integral de Poisson}\}$$

se aplica **operadores de Germaine**, o sea mejor dicho pasamos a calcular la conjugada armónica:  $C(\ln q_a)$  con “operadores de Germaine”.

Usaremos los operadores de 1ra especie y 1ra categoría, o sea:

Los de 1ra. Categoría : cumplen con estas propiedades

$$\left. \begin{aligned} A[\cos nq] &= a_m \sin(mq) \\ A[\sin nq] &= -a_m \cos(mq) \\ A[Cte] &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta q &= \frac{2p}{2n} \\ \Delta q &= \frac{p}{n} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &1a. \text{ Especie : } 2n \\ &2a. \text{ Especie : } 4n \end{aligned}$$

La función conjugada armónica ( $Q_i$ ) en un punto cualquiera “i” se obtiene mediante una combinación lineal, así:

$$Q_i = K_1(P_{i+1} - P_{i-1}) + K_2(P_{i+2} - P_{i-2}) + \dots K_p(P_{i+p} - P_{i-p}) + \dots \\ \dots + K_{n-1}(P_{i+n-1} - P_{i-n+1})$$



$$\text{Donde: } K_p \begin{cases} K_p = 0 & ; \text{ si } p \text{ es par.} \\ K_p = -\frac{1}{n} \cot\left(\frac{p}{2n}\right) & ; \text{ si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

$K_p \rightarrow$  Coeficiente de Germaine genérico

## 2da Categoría:

También transforman funciones periódicas, de periodo  $2p$ , de tal manera que aplicadas a las funciones siguientes dá:

$$B[\cos nq] = b_m \cos(mq)$$

$$B[\sin nq] = b_m \sin(mq)$$

$$B[cte] \neq 0$$

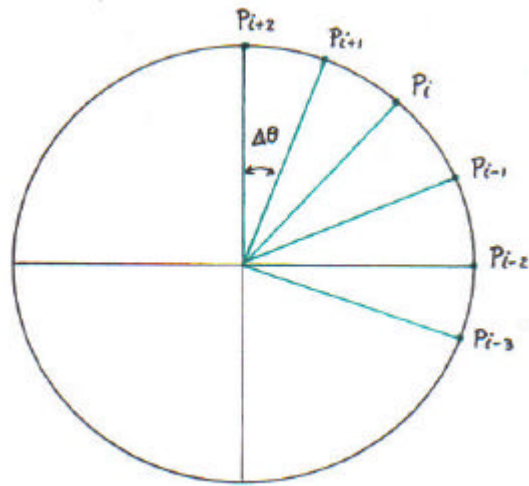
regresando a los operadores de 1era categoría, se cumple la combinación lineal siguiente:

$$Q_i = K_0 P_i + K_1 (P_{i+1} + P_{i-1}) + K_2 (P_{i+2} + P_{i-2}) + \dots K_p (P_{i+p} + P_{i-p}) + \dots \\ \dots K_{n-1} (P_{i+n-1} + P_{i-n+1}) + K_n P_{i+n}$$

Donde:  $K_p = 0 \rightarrow \{ \text{si } p \text{ es par} \}$

$$K_p = \frac{-1}{n(1 - \cos \frac{p}{n})} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } p \text{ es impar, entonces} \\ \text{va a obedecer a esta formula} \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una función cualquiera y queremos hallar la **CONJUGADA ARMONICA** en el punto **Pi**, (punto “P” genérico),



entonces tenemos el punto  $P_{i-1}$  y el punto  $P_{i+1}$ , el punto  $P_{i+2}$  y el punto  $P_{i-2}$ , y así sucesivamente en todo el círculo, con esos valores hacemos la combinación lineal dada por ésta expresión:

$$Q_i = K_1(P_{i+1} - P_{i-1}) + K_2(P_{i+2} - P_{i-2}) + \dots K_p(P_{i+p} - P_{i-p}) + \dots$$

$$\dots\dots\dots + K_{n-1}(P_{i+n-1} - P_{i-n+1})$$

Los deltas de  $P$  ( $\Delta P$ ): tomamos un punto después, un punto antes, luego cogemos dos después, dos antes; luego tres después tres antes....., o sea cogemos en forma simétrica.

Aplicamos todo esto para hallar " $C(\ln q_a)$ " y siempre vamos a llegar a lo mismo:

$$C = C(\ln q_a) + F(T)$$

siempre vamos a buscar el  $C$ .

Regresando a Lighthill:

$$C = C(\ln q_a) + F(T)$$

Hacemos:

$$C_1 = C(\ln q_a)$$

$$C_2 = F(T)$$

$$C = C_1 + C_2$$

$C \leftarrow$  Este es el  $j_i$  genérico que es igual al  $C_1$  más el  $C_2$ , en grados

$C_1$ : Lo calculamos aplicando operadores de Germaine, dividiendo el círculo en 36 partes, "para facilidad"; pues podemos dividir en la cantidad de partes que se quiera,

pues todo depende de la precisión que se quiera buscar, mientras más partes más preciso será el método, pero lógicamente mucho más trabajo.

Regresando al cálculo de  $C_1$ :

$$2n = 36 \Rightarrow \frac{pP}{2n} = \frac{180^\circ P}{2n} = \frac{180P}{36}$$

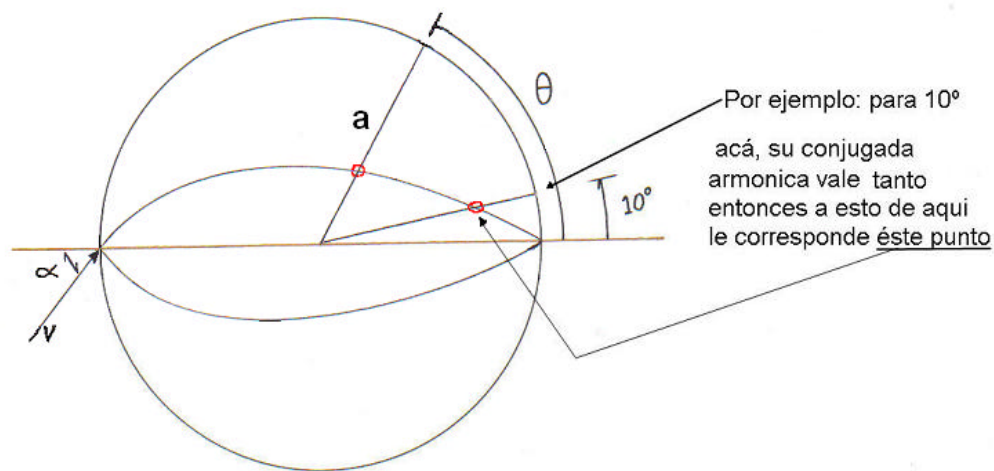
$$\Rightarrow \frac{180P}{36} = 5p \quad \leftarrow \begin{cases} p \text{ es impar, por lo tanto} \\ \text{va a obedecer a la formula siguiente:} \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} 2n = 36 \\ n = 18 \end{matrix} \right\} \quad K_p = -\frac{1}{n} \cot\left(\frac{pP}{2n}\right)$$

Obteniendo el siguiente valor para nuestro coeficiente de Germaine:

$$K_p = -\frac{1}{18} \cot(5p)^\circ$$

por cada punto (en que hayamos dividido el círculo) tenemos que encontrar una conjugada armónica.



Explicando un poco, por ejemplo para cada  $q$ , para  $\theta = 10^\circ$  cuanto vale la conjugada armónica a los diez grados.

Para  $\theta = 20^\circ$  cuanto vale su conjugada armónica, para  $\theta = 30^\circ$  cuanto vale su conjugada armónica...

Por eso que lo grafica por que tiene la conjugada armónica para diferentes  $q_s$ .

Además notemos que  $P_{ia} = \ln q$

Donde:  $a$  varia desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$

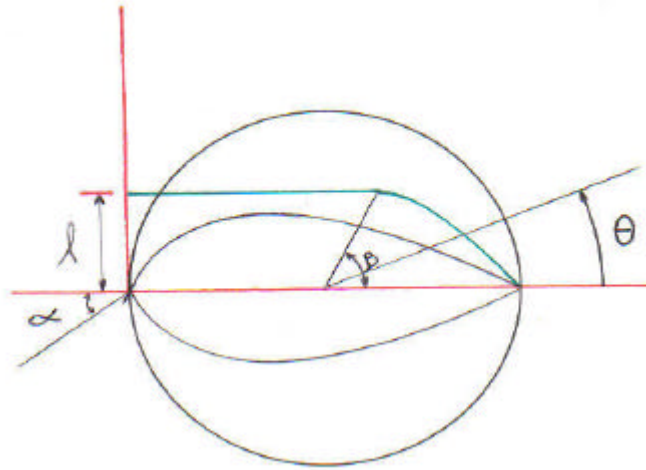
Aclaremos todo lo expuesto con un ejemplo numérico:

Ahora dado un ángulo de ataque **a** y un **b** determinados, veremos como sale el perfil.

$$\mathbf{a} = \text{arcTg}(0,03) \rightarrow \mathbf{a} = 1.7183^\circ$$

$$\mathbf{b} = \text{arcCos}(0,22) \rightarrow \mathbf{b} = 77.29^\circ$$

$$T = 0.03 \text{Tang } \mathbf{q}/2$$

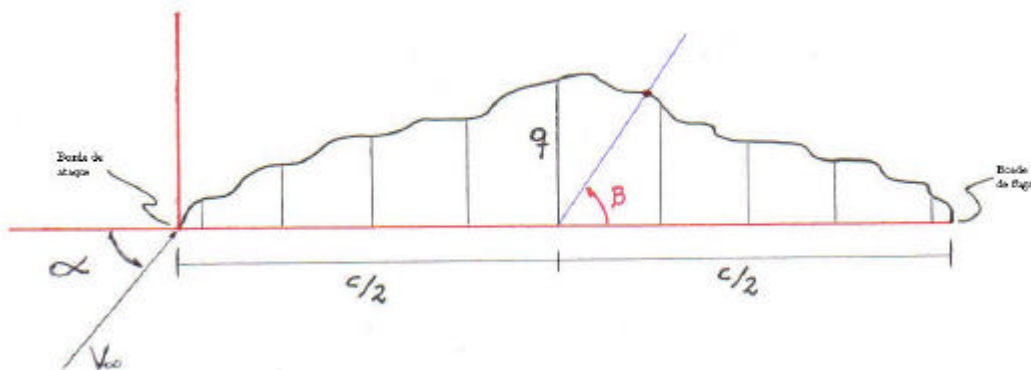


Para un arco cuya tangente valga tres centésimos (0.03), es un arco pequeño de ataque, esto es para determinar cuanto vale mi ataque (mi ángulo de ataque).

Hemos podido dar también un arco 0,05, 0,06, 0,10, 20°, 30°, diferentes valores para nuestro **a**.

Observemos también que **a** puede ser el arco tangente de 0.05, de 0.06, de 0.10, etc, le podemos dar diferentes valores pero eso sí el valor que le demos queda **Fijo** para todo el método, este es el “dato” primigenio.

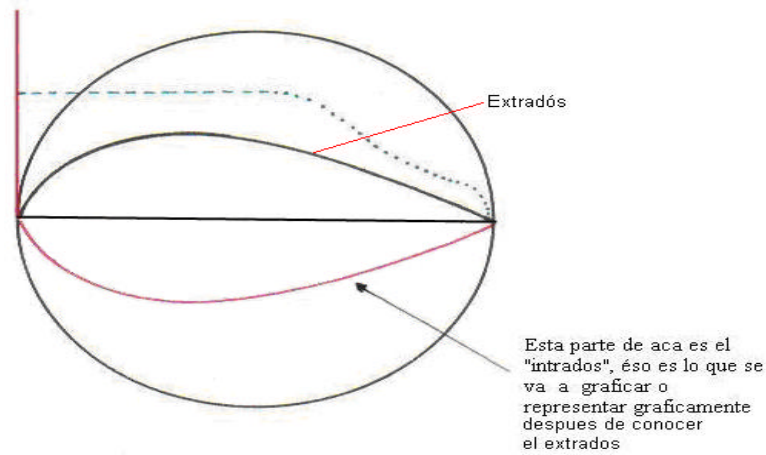
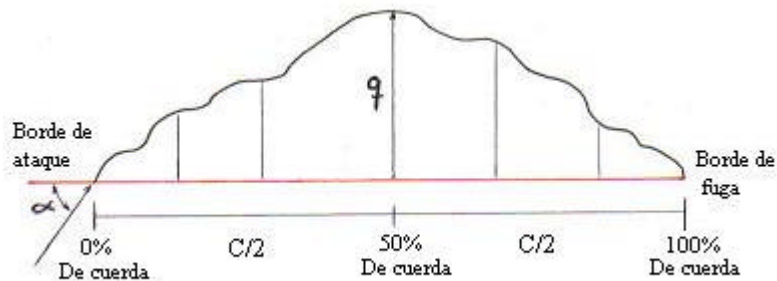
Este es mi **a**, y con este **a** voy ha encontrar esa distribución de velocidades que es **q**.



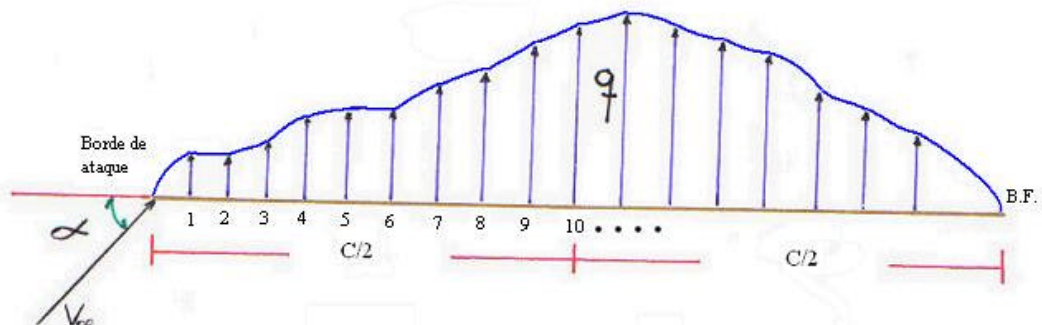
Vista: La distribución de velocidades a lo largo de la cuerda; del 0% de la cuerda al 100%.

0% de la cuerda en el Borde de Ataque [B.A.]

100% de la cuerda en el Borde de Fuga [B.F.]



Lo que realmente tenemos en el método de Lighthill es LA CUERDA y una distribución de velocidades a lo largo de ella, a un ángulo de ataque  $\alpha$ .



De 1 a 2 tenemos un valor de  $q$  (módulo de velocidad)

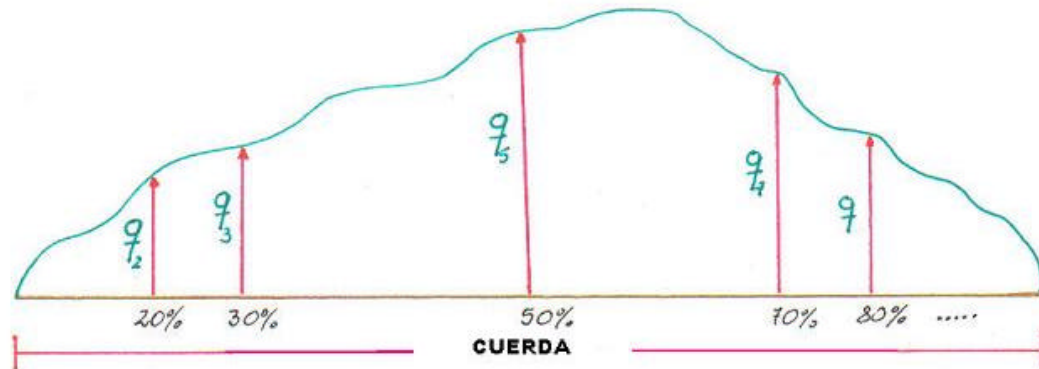
De 2 a 3 tenemos otro valor de  $q$

De 3 a 4 tenemos otro valor

y así sucesivamente.

En cualquier punto tenemos valores  $\therefore$  ésta es “UNA DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES”.

Por ejemplo cuanto vale la velocidad al 50% de la cuerda, al 50% de la cuerda se tiene un “valor” ( $q_5$ ) de la velocidad



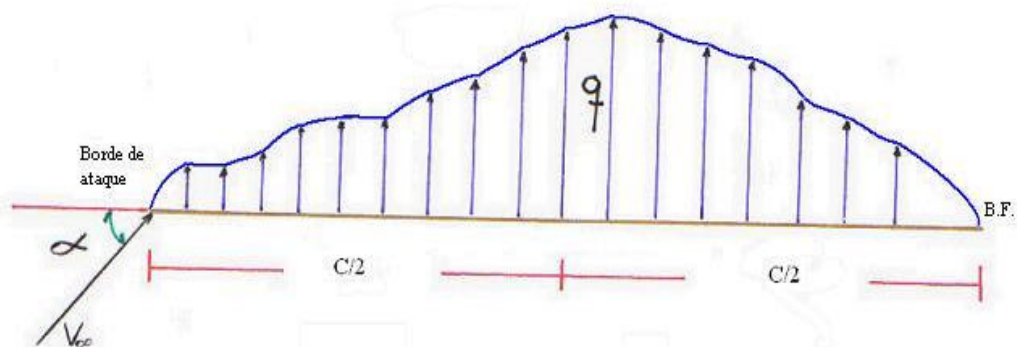
Al 20% de la cuerda tenemos éste valor ( $q_2$ ) de la velocidad

al 30%  $\rightarrow$  ( $q_3$ )

al 70%  $\rightarrow$  ( $q_7$ )

al 80% de la cuerda ( $q_8$ ); tendremos diversos valores de la velocidad ( $q$ ).

O sea nosotros obligatoriamente debemos tener esta “DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES” a un ángulo de ataque  $\alpha$ :

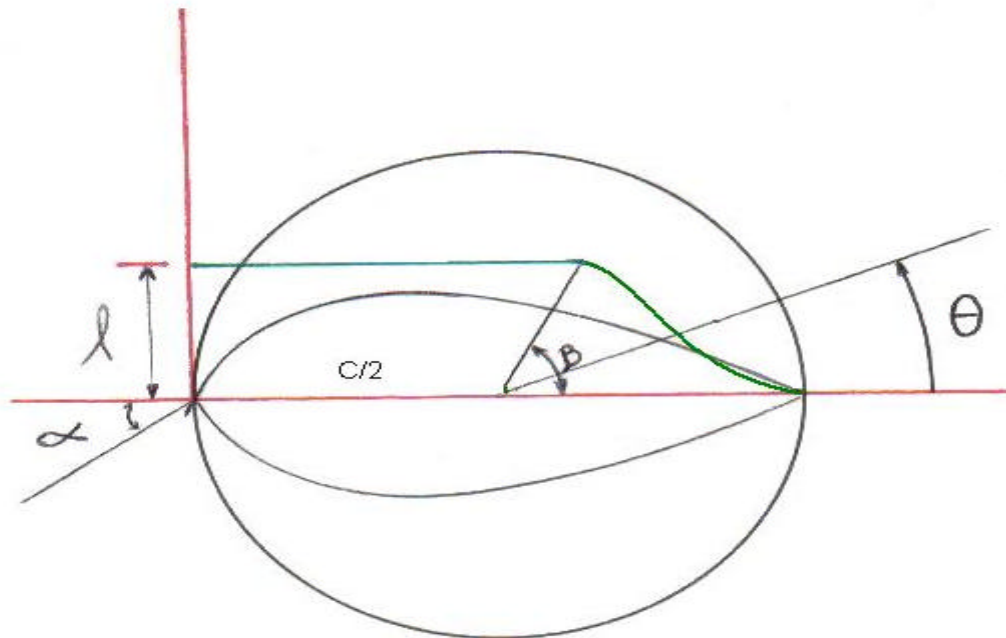


A lo largo de la cuerda, con este dato que es “ $q$ ” para un ángulo “ $\alpha$ ”.

Por supuesto que conociendo esta distribución de velocidades que es “q”; con q obtenemos el  $\ln q$ , y reemplazando en sus respectivas formulas hallamos  $a_0$ ,  $a_1$  y  $b_1$ . Después de esta pequeña disertación sobre la “distribución de velocidades” y **a**, continuamos con nuestro ejemplo numérico:

$$[13] \quad \ln q_a = \ell \qquad \qquad \qquad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p}$$

$$[14] \quad \ln q_a = \ell - k(Cos\mathbf{q} - Cos\mathbf{b}) \quad 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b}$$

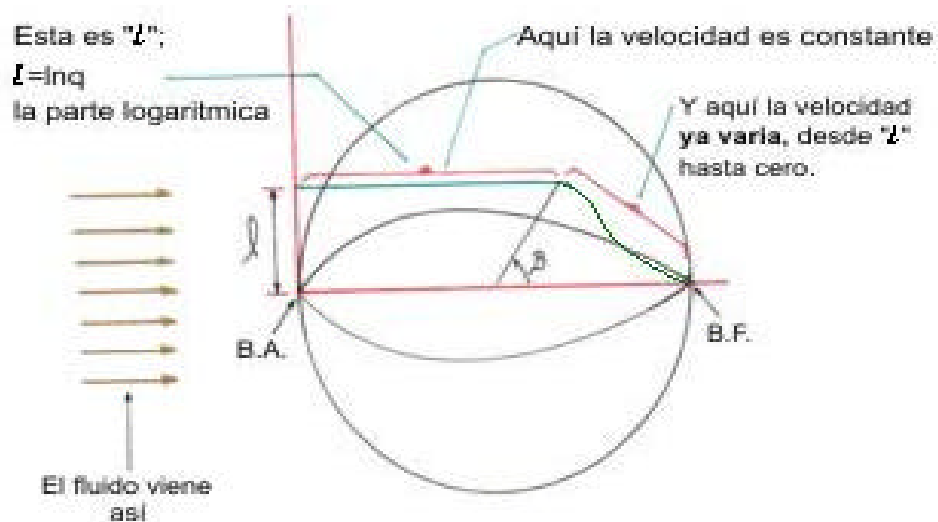

$$\begin{cases} \ln q_a = \ell & ; \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} \\ \ln q_a = \ell - k (\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) & ; \quad 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} \end{cases}$$

71

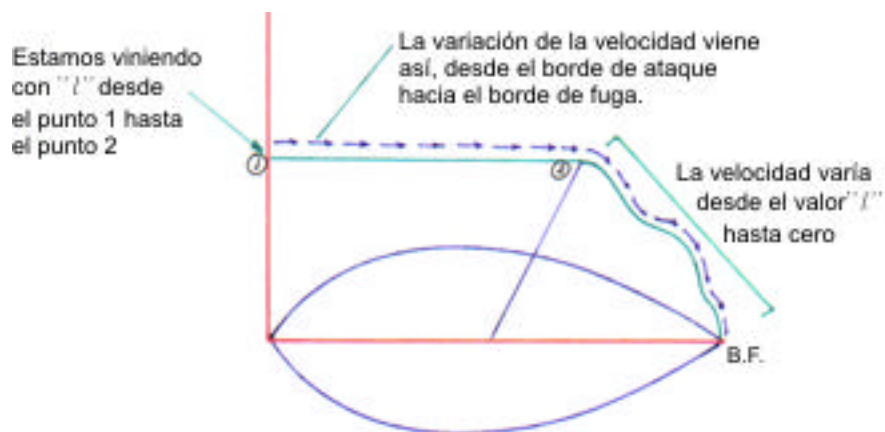
Alfa ( $\infty$ ) y beta ( $\beta$ ) son las variables clásicas para el diseño, pero si queremos variar el Dato, también se puede variar:

Un " $\ell$ " mas grande ó Un " $\ell$ " mas chico

Depende de qué velocidad se quiera desarrollar



Explicando mejor con este gráfico el comportamiento de " $\ell$ "



Para que cierre el perfil se deben cumplir: las siguientes expresiones dadas por FOURIER:



$$\text{I} \quad a_0 = \int_0^{2p} \ln q_0 d\mathbf{q} = 0$$

$$\text{II} \quad a_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

$$\text{III} \quad b_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

[Es aqui, en cada una de estas formulas donde reemplazamos  $\ln q_a$ , para hallar  $a_0, a_1, b_1$ ]

De [12] sabemos que:

$$\ln q_0 = \ln q_a + \ln \left[ \frac{\cos \mathbf{q}/2}{\cos(\mathbf{q}/2 - \mathbf{a})} \right]$$

Reemplazando la distribución correspondiente de acuerdo a los limites, tenemos para cuando:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} & \rightarrow \ln q_a = \ell \\ 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} & \rightarrow \ln q_a = \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Tomamos la ec. [1]:  $a_0 = \int_0^{2p} \ell n q_0 d\mathbf{q} = 0$  y la desboblamos para los dos intervalos:

$$0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p}$$

$$a_0 = \int_0^b \ln q_0 d\mathbf{q} + \int_b^p \ln q_0 d\mathbf{q} = 0 \quad \dots [15]$$

Sustituimos [12] por el termino " $\ln q_0$ " en cada uno de los intervalos de [15]

$$a_0 = \int_0^b \left\{ \ln q_\infty + \ln \left[ \frac{\cos \mathbf{q}/2}{\cos(\mathbf{q}/2 - \mathbf{a})} \right] \right\} d\mathbf{q} + \int_b^p \left\{ \ln q_\infty + \ln \left[ \frac{\cos \mathbf{q}/2}{\cos(\mathbf{q}/2 - \infty)} \right] \right\} d\mathbf{q} = 0$$

Ahora reemplazando la distribución correspondiente de acuerdo a los limites (de integración) así tenemos:

$$\text{para } \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \ln q_a = \ell$$

y

$$\text{para } 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \ln q_a = \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b})$$

$$a_0 = \int_0^b \left\{ \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} d\mathbf{q} + \int_b^p \left\{ \ell + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} d\mathbf{q} = 0$$

Identifiquemos a ésta ec. con el [16]

$$\int_0^b \left\{ \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} d\mathbf{q} + \int_b^p \left\{ \ell + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} d\mathbf{q} = 0 \dots [16]$$

Ahora vamos a trabajar en [II] tenemos:

$$a_1 = \int_0^{2p} \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0$$

Desdoblando en los intervalos dados

$$a_1 = \int_0^b \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} + \int_b^p \ln q_0 \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0 \dots [17]$$

Sustituimos [12] en [17] obteniendo:

$$a_1 = \int_0^b \left\{ \ln q_\infty + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} + \int_b^p \left\{ \ln q_\infty + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0 [18]$$

Reemplazando los valores de  $\ln q_\infty$  en [18] de acuerdo a los límites de integración:

$$\begin{cases} \text{Para } 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} & \rightarrow \quad \ln q_\infty = \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) \\ \text{Para } \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} & \rightarrow \quad \ln q_\infty = \ell \end{cases}$$

Obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} a_1 = & \int_0^b \left\{ \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} \\ & + \int_b^p \left\{ \ell + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0 \quad [19] \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^b \left\{ \ell - k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b}) + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} + \int_b^p \left\{ \ell + \ln \left[ \frac{\cos \frac{\mathbf{q}}{2}}{\cos(\frac{\mathbf{q}}{2} - \infty)} \right] \right\} \cos \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0}$$

[a la que hemos designado como ec. 19]

Luego de integrar tanto [16] como [19] llegamos a dos ecuaciones con dos incógnitas

$\ell$  y  $k$ .

$$\left. \begin{array}{l} [20] \quad \ell \mathbf{p} - k(\text{Sen} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{Cos} \mathbf{b}) - L(\mathbf{a}) = 0 \\ [21] \quad -k \left( \frac{\mathbf{b}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sen} 2\mathbf{b} \right) + K(\mathbf{a}) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(\mathbf{a}) \\ K(\mathbf{a}) \end{array} \right\} \text{ Estas constantes de integración están en función de alfa } (\mathbf{a})$$

Donde :

$$L(\mathbf{a}) = 2 \left[ \mathbf{a} \ln(\cot \mathbf{a}) + (tg \mathbf{a} - \frac{tg^3 \mathbf{a}}{3^2} + \frac{tg^5 \mathbf{a}}{5^2} - \dots) \right] = 0,2703$$

$$K(\mathbf{a}) = p \text{sen}^2 \mathbf{a} + \text{sen} 2\mathbf{a} \ln(\cot \mathbf{a}) = 0,21303$$

Estas dos funciones se han hallado experimentalmente dando para  $L(\mathbf{a})$  este valor :

0,2703

y para  $K(\mathbf{a})$  este valor: 0,21303

Luego substituyendo valores de  $L(\mathbf{a})$  y  $K(\mathbf{a})$  en [20] y en [21]

$$\left. \begin{array}{l} \ell \mathbf{p} - k(\text{Sen} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{Cos} \mathbf{b}) - L(\mathbf{a}) = 0 \\ -k \left( \frac{\mathbf{b}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sen} 2\mathbf{b} \right) + K(\mathbf{a}) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ell \mathbf{p} - k(\text{Sen} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{Cos} \mathbf{b}) - 0,2703 = 0 \\ -k \left( \frac{\mathbf{b}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sen} 2\mathbf{b} \right) + 0,21303 = 0 \end{array} \right\}$$

Aplicando ahora los datos de nuestro ejemplo numérico

$$\mathbf{a} = \text{arcTg}(0,03) \rightarrow \mathbf{a} = 1.7183^\circ$$

$$\mathbf{b} = \text{arcCos}(0,22) \rightarrow \mathbf{b} = 77.29^\circ$$

$$\therefore T = 0.03 \text{Tang } \mathbf{a}/2$$

Transformando nuestras medidas angulares a radianes:

$$\mathbf{a} = 0.029989992 \text{ rad}$$

$$\mathbf{b} = 1.348964979 \text{ rad}$$

Reemplazando valores en [20] :

$$\ell \mathbf{p} - k(\text{Sen} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{Cos} \mathbf{b}) - L(\mathbf{a}) = 0$$

$$\ell \mathbf{p} - k(0.975496158 - 0.296794504) - 0.2703 = 0$$

$$\ell \mathbf{p} - k(0.678701654) - 0.2703 = 0 \quad \dots [22]$$

Reemplazando valores en [21] :

$$-k \left( \frac{\mathbf{b}}{2} - \frac{1}{4} \text{Sen} 2\mathbf{b} \right) + K(\mathbf{a}) = 0$$

$$-k(0.674482489 - 0.107312607) + 0.21303 = 0$$

$$-k(0.567169882) + 0.21303 = 0$$

$$k = \frac{0.21303}{0.567169882}$$

$$\boxed{k = 0.375601749} \quad \dots [23]$$

Sustituyendo el valor de [23] en [22]

$$\ell \mathbf{p} - k(0.678701654) - 0.2703 = 0$$

$$\ell \mathbf{p} - (0.375601749)(0.678701654) - 0.2703 = 0$$

$$\ell \mathbf{p} - 0.254921528 - 0.2703 = 0$$

$$\ell \mathbf{p} - 0.525221528 = 0$$

$$\ell = \frac{0.525221528}{\mathbf{p}}$$

$$\boxed{\ell = 0.167183205} \quad \dots [24]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 0.375601749 \\ \ell = 0.167183205 \end{array}}$$

La distribución

$$\begin{cases} \ln q_a = \ell & ; \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} \\ \ln q_a = \ell - K(\text{Cos} \mathbf{q} - \text{Cos} \mathbf{b}) & ; \quad 0 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{b} \end{cases}$$

Quedara como sigue:

$$\ln q_a = 0,16719 \quad \text{para} \quad [b, p]$$

$$\ln q_a = 0,16719 - 0,3756(\cos q - 0,22) \quad \text{para} \quad [q, b]$$

Ahora, para calcular las coordenadas del perfil recurrimos a las ecuaciones [8] y [9]:

$$dx = \frac{2Va}{q_0} \cos \alpha d(\cos q) \quad \dots [8]$$

$$dy = \frac{2Va}{q_0} \sin \alpha d(\cos q) \quad \dots [9]$$

pero tenemos que sustituir un valor determinado para cada intervalo, así:

Para el intervalo  $b \leq q \leq p$

$$\left[ \frac{2}{q_0} \right] \quad \text{sera igual a:} \quad \frac{2(1+T)}{e^l \sec \alpha} \quad \dots [t]$$

y para el intervalo  $0 \leq q < b$

$$\left[ \frac{2}{q_0} \right] \quad \text{sera igual a:} \quad \frac{2(1+T)}{e^l \sec \alpha} e^{k(\cos q - \cos b)}$$

Demostrando la igualdad [t]

Sabemos que  $T = \tan \alpha \tan \frac{q}{2}$

$$\ln q_a = l \quad \rightarrow \quad \boxed{e^l = q_a}$$

$$\frac{2}{q_0} = \frac{2(1+T)}{e^l \sec \alpha}$$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1+T}{e^l \sec \alpha}$$

$$\boxed{q_0 = \frac{e^l \sec \alpha}{1+T}}$$

$$\frac{q_0}{q_a} = \frac{\frac{e^i \text{Sec} \mathbf{a}}{1+T}}{e^i} = \frac{\cancel{e^i} \text{Sec} \mathbf{a}}{\cancel{e^i} (1+T)}$$

$$\boxed{\frac{q_0}{q_a} = \frac{\text{Sec} \mathbf{a}}{1+T}} \quad \dots \dots \quad [\text{d1}]$$

Operando en [d1]

$$\frac{q_0}{q_a} = \frac{\text{Sec} \mathbf{a}}{1+T}$$

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{1+T}{\text{Sec} \mathbf{a}} \rightarrow \boxed{\frac{q_a}{q_0} = (1+T) \text{Cos} \mathbf{a}} \quad \dots \dots [\text{d2}]$$

pero también

$$\boxed{\frac{q_a}{q_0} = \frac{\text{Cos}(\mathbf{q}/_2 - \mathbf{a})}{\text{Cos} \mathbf{q}/_2}}$$

Desarrollando

$$\frac{q_a}{q_0} = \frac{\text{Cos} \mathbf{a} \text{Cos} \mathbf{q}/_2 + \text{Sen} \mathbf{a} \text{Sen} \mathbf{q}/_2}{\text{Cos} \mathbf{q}/_2}$$

$$\boxed{\frac{q_a}{q_0} = \text{Cos} \mathbf{a} + \text{Sen} \mathbf{a} \text{Tang} \mathbf{q}/_2} \quad \dots \dots [\text{d3}]$$

Haciendo [d2] = [d3]

$$\text{Cos} \mathbf{a} + \text{Sen} \mathbf{a} \text{Tang} \mathbf{q}/_2 = (1+T) \text{Cos} \mathbf{a}$$

$$\cancel{\text{Cos} \mathbf{a}} + \cancel{\text{Cos} \mathbf{a}} \left\{ \frac{\text{Sen} \mathbf{a}}{\text{Cos} \mathbf{a}} \right\} \text{Tang} \mathbf{q}/_2 = (1+T) \cancel{\text{Cos} \mathbf{a}}$$

$$1 + \underbrace{\text{Tang} \mathbf{a} \text{Tang} \mathbf{q}/_2}_{\text{T}} = 1+T$$

$$1 + \quad \text{T} \quad = 1+T$$

$$\boxed{1+T = 1+T} \quad \text{lqqd.}$$

acomodando términos en las ecuaciones [8] y [9] obtendremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{va} = \frac{2}{q_0} \text{sen} \mathbf{q} \cos \mathbf{c} d\mathbf{q} \end{array} \right.$$

$$\frac{dy}{va} = \frac{2}{q_0} \text{sen} \mathbf{q} \text{ sen} \mathbf{c} d\mathbf{q}$$

Ahora sustituyendo el valor asignado a  $\left[ \frac{2}{q_0} \right]$  para

cada intervalo angular, primero para equis "x" :

$$\frac{dx}{va} = \frac{2(1+T)}{e^\ell \sec \infty} \cdot \cos x \cdot \text{sen} \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} \quad \dots [25]$$

$$\frac{dx}{va} = \frac{2(1+T)}{e^\ell \sec \infty} \cdot e^{k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b})} \cdot \cos x \text{sen} \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad 0 \leq \mathbf{q} < \mathbf{b} \quad \dots [26]$$

ahora para "y":

$$\frac{dy}{Va} = \frac{2(1+T)}{e^\ell \text{Sec} \mathbf{a}} \cdot \text{Sen} \mathbf{c} \text{ Sen} \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad \dots \quad \mathbf{b} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{p} \quad \dots [27]$$

$$\frac{dy}{va} = \frac{2(1+T)}{e^\ell \sec \infty} \cdot e^{k(\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{b})} \cdot \text{Sen} x \text{Sen} \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad \dots \quad 0 \leq \mathbf{q} < \mathbf{b} \quad \dots [28]$$

Empezando a sustituir valores:

$$\mathbf{a} = 1.7183^\circ$$

$$\ell = 0,167183205$$

$$e^\ell \text{Sec} \mathbf{a} = e^{(0.167190)} \text{Sec}(1.7183^\circ)$$

$$e^\ell \text{Sec} \mathbf{a} = (1.18197882)(1.00007859)$$

$$e^\ell \text{Sec} \mathbf{a} = 1.182071712$$

$$\frac{2}{e^\ell \text{Sec} \mathbf{a}} = 1.691944727$$

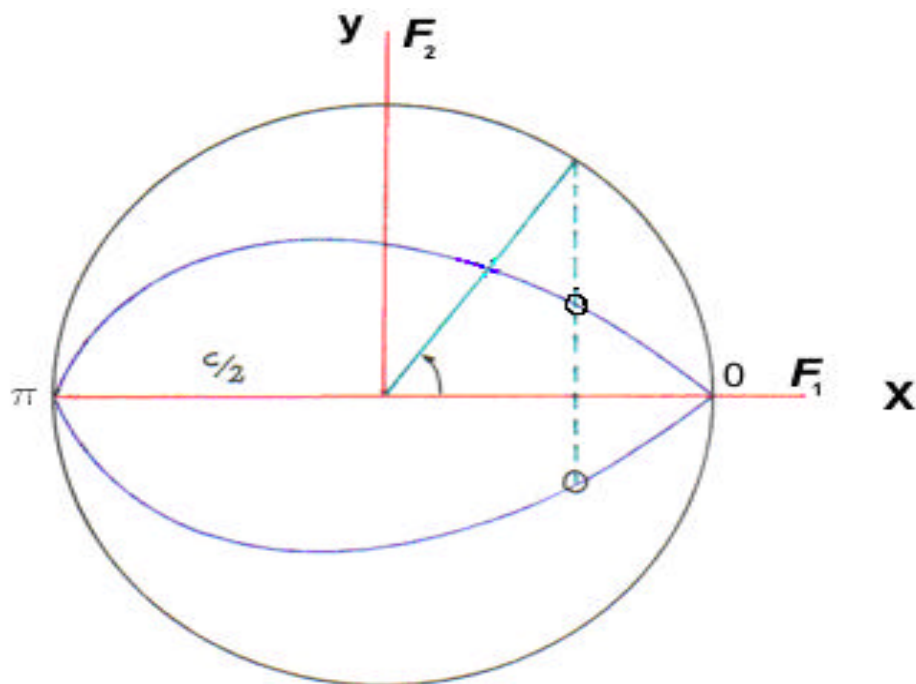
reemplazando este valor en las ecuaciones e integrando

obtenemos X e Y, para ésto nos independizamos de la velocidad y el valor de a.

$$\int \frac{dx}{Va} = \int F_1 \quad ; \quad \int \frac{dy}{Va} = \int F_2$$

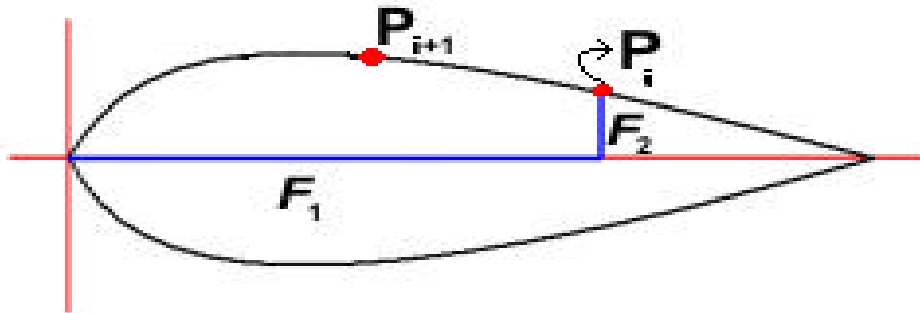
$$\left(\frac{dx}{Va}\right) \leftarrow \text{Es una absisa por unidad de velocidad e independiente del radio del cilindro}$$
$$\left(\frac{dy}{Va}\right) \leftarrow \text{Es una ordenada por unidad de velocidad e independiente del radio del cilindro}$$
$$(Va) \leftarrow Cte$$

Después se grafica  $x$  e  $y$  , siendo  $x$  e  $y$  las coordenadas de un punto genérico del perfil buscado.





Así (luego de integrar) hemos obtenido **un punto** del perfil y así sucesivamente se obtendrán todos los puntos del perfil generado.



**FIN**

## 5.2 CONTRIBUCIÓN PERSONAL DE UN PROGRAMA EN LENGUAJE FORTRAN 90 FOR WINDOWS APLICANDO EL MÉTODO DE Lighthill PARA SU USO EN COMPUTADORA

### PROGRAMA PARA GENERAR PERFILES AERODINAMICOS USANDO EL MÉTODO DE Lighthill DESARROLLADO POR MI PERSONA

#### Item

```
1. PROGRAM Aplicación del método de Lighthill usando fortran 90 for
   windows
2. USE MSFLIB
3. INTEGER(4) oldcolor,oldtc
4. INTEGER(2) fontnum, numfonts,result
5. INTEGER(4) xcoord, ycoord
6. TYPE (xycoord) pos
7. real, dimension(36):: t, Integ, SFT,tetha,ft,the
8. real, dimension(36):: xi,seno,coseno,sen,cose,k11,k12,k13
9. real, dimension(36):: f1,f2, qi,lnq
10. REAL, dimension(36):: xva,yva
11. REAL, dimension(35):: ki
12. integer i,j,k,m,L1,L2
13. real escx,escy,h
14. real lalfa,alfal,alfa,kalfa,sum,suml,beta
15. double precision ka,l,a,b,x
16. oldcolor = SETBKCOLORRGB(#00ffF0)
17. oldcolor = SETCOLORRGB(#FF)
18. CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
19. numfonts = INITIALIZEFONTS ( )
20. fontnum = SETFONT ('t''Arial''h38w12')
21. CALL MOVETO (INT2(85), INT2(10), pos)
22. CALL OUTGTEXT('UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS')
23. fontnum = SETFONT ('t''Arial''h30w12')
24. CALL MOVETO (INT2(165), INT2(45), pos)
25. CALL OUTGTEXT('INGENIERIA MECANICA DE FLUIDOS')
26. oldcolor = SETCOLORRGB(#FF00ff)
27. fontnum = SETFONT ('t''Comic Sans MS''h45w14')
28. CALL MOVETO (INT2(340), INT2(85), pos)
29. CALL OUTGTEXT('TESIS')
30. xcoord=180;ycoord=125
31. result = LOADIMAGE ('C:\DATOS\perfil.bmp", xcoord, ycoord)
32. oldcolor = SETCOLORRGB(#FFF)
33. fontnum = SETFONT ('t''Arial''h28w12')
34. CALL MOVETO (INT2(140), INT2(150), pos)
35. CALL OUTGTEXT('DISEÑO DE PERFILES AERODINAMICOS')
36. CALL MOVETO (INT2(205), INT2(190), pos)
37. CALL OUTGTEXT('POR EL METODO DE LIGHTILL')
38. oldcolor = SETCOLORRGB(#F)
39. fontnum = SETFONT ('t''Arial''h26w12')
40. CALL MOVETO (INT2(110), INT2(355), pos)
41. CALL OUTGTEXT('Bach. : LUIS ALFONSO GUEVARA BARRANTES')
42. CALL MOVETO (INT2(110), INT2(390), pos)
43. CALL OUTGTEXT('Asesor: Ing. RAUL VARGAS RONCAL')
44. fontnum = SETFONT ('t''Roman''h25w8')
45. CALL MOVETO (INT2(120), INT2(450), pos)
46. CALL OUTGTEXT('Software Elaborado en Fortran 90 For
   Windows')
47. fontnum = SETFONT ('t''Roman''h35w8')
48. CALL MOVETO (INT2(340), INT2(500), pos)
```

```

49.     CALL OUTGTEXT('C.U. 2006')
50.     READ*
51.     !Para ingresar datos
52.     oldcolor = SETBKCOLORRGB(#ffff)
53.     CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
54.     oldtc = SETTEXTCOLORRGB(#00ff)
55.     PI=3.14159265
56.     !calculo inicial de alfa y beta
57.     Print*,"Ingrese valor de ALFA ="
58.     read*,alfa
59.     Print*,"Ingrese valor de BETA ="
60.     read*,beta
61.     open(unit=5,file="c:\Datos\perfil.xls",status="REPLACE")
62.     if (alfa<=0.0) then
63.         alfa=0.4
64.     endif
65.     if (alfa<=0.4) then
66.         alfa1=0.4
67.         print 100, ALFA
68.         100 format(2x,"ALFA = ",F8.4)
69.     else
70.         print 101,ALFA
71.         101 FORMAT(2x,"ALFA = ",F8.4)
72.         ALFA1=ALFA
73.         print 102,BETA
74.         102 FORMAT(2x,"BETA = ",F8.4)
75.         alfa=(alfa*PI/180.)
76.         beta=(beta*PI/180.)
77.         SUM=0.0
78.         I=1
79.         do while(i/=21)
80.             sum=exp(i*log(tan(alfa)))/(i*i) + sum
81.             i=i+4
82.         end do
83.         sum1=0.0
84.         i=3
85.         do while(i/=19)
86.             sum1=exp(i*log(tan(alfa)))/(i*i) + sum1
87.             i=i+4
88.         end do
89.         !Calculo de K y L
90.         lalfa = 2.*(alfa*log(cotan(alfa))+(sum-sum1))
91.         kalfa=
            (3.1416)*exp(2.*log(sin(alfa)))+sin(2*alfa)*log(cotan(alfa))
92.         ka=kalfa/(beta/2.-(sin(2.*beta))/4.)
93.         L=(Lalfa+ka*(sin(beta)-beta*cos(beta)))/(3.1416)
94.         print 103, ka
95.         103 FORMAT(2X,"Valor de K = ",F14.8)
96.         print 104, L
97.         104 FORMAT(2X,"Valor de L = ",F14.8)
98.     endif
99.     read*
100.    CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
101.    !*****
102.    do i=0,36
103.        tetha(i)=i*10
104.        t(i)=0.
105.        integ(i)=0.
106.        ft(i)=0.
107.        sft(i)=0.
108.    end do

```

```

109.      do i=0,36
110.      if (i==18) then
111.      t(i)=0
112.      else
113.      a. t(i)=(alfa*tan(tetha(i)*pi/360))
114.      endif
115.      end do
116.      !*****
117.      suma=0
118.      do i=1,17
119.      if (i==1) then
120.      a=0.00000001
121.      b=t(1)
122.      else
123.      a=t(i-1)
124.      b=t(i)
125.      endif
126.      m=100
127.      x=a
128.      dfx=func_y(x)
129.      h=(b-a)/m
130.      k= (m/2)
131.      do
132.      x=x+h
133.      dfx=dfx+4*(func_y(x))
134.      x=x+h
135.      dfx=dfx+2*(func_y(x))
136.      k=k-1
137.      if (k==0) exit
138.      end do
139.      x=b
140.      dfx=dfx-func_y(x)
141.      integ(i)=h*dfx/3.
142.      ft(i)=integ(i)*(180/pi)
143.      suma=ft(i)+suma
144.      sft(i)=suma
145.      END DO
146.      sft(18)=90
147.      j=0
148.      do i=19,36
149.      sft(i)= -sft(17-j)
150.      j=j+1
151.      end do
152.      !*****
153.      call imprimir(tetha,t,sft)
154.      !cuadro 1
155.      read*
156.      CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
157.      !*****
158.      do i=0,36
159.      the(i)=i*10
160.      end do
161.      !*****
162.      do j=0,36
163.      lnq(j)=0
164.      qi(j)=0
165.      end do
166.      do i=1,35
167.      ki(i)=0
168.      enddo
169.      !*****

```

```

169.    do i=1,35
170.    ki(i)=-(1/18.)*(cotan(i*PI/36))
171.    end do
172.    do i=0,7
173.    lnq(i)=L-ka*(cos(the(i)*pi/180)-cos(beta))
174.    end do
175.    do i=8,28
176.    lnq(i)=L
177.    end do
178.    do i=29,36
179.    lnq(i)=L+ka*(cos(the(i)*PI/180)-cos(beta))
180.    end do
181.    !*****
182.    do j=0,36
183.    do m=1,18
184.    i=j
185.    k=2*m-1
186.    L1=i+k
187.    L2=i-k
188.    if (L1>36) L1=L1-36
189.    if (L2<0) L2=abs(L2)
190.    if (m==1) sum=0
191.    sum=ki(k)*(lnq(L1)-lnq(L2))+sum
192.    if (j==1 .or. j==35) then
193.    qi(j)=sum
194.    else
195.    qi(j)=sum/2.0
196.    endif
197.    end do
198.    end do
199.    !*****
200.    do i=0,36
201.    xi(i)=qi(i)*180/pi+sft(i)
202.    end do
203.    do i=0,36
204.    seno(i)=sin(xi(i)*PI/180)
205.    coseno(i)=cos(xi(i)*PI/180)
206.    sen(i)=sin(tetha(i)*PI/180)
207.    cose(i)=cos(tetha(i)*PI/180)
208.    k11(i)=(ka)*(cose(i)-cos(beta))
209.    k12(i)=exp(k11(i))
210.    end do
211.    do i=0,18
212.    if (tetha(i)<80) then
213.    k13(i)= (2*cos(alfa)/exp(L))*(1+t(i))*k12(i)
214.    else
215.    k13(i)=(2*cos(alfa)/exp(L))*(1+t(i))
216.    end if
217.    end do
218.    j=0
219.    do i=19,36
220.    k13(i)=k13(17-j)
221.    j=j+1
222.    end do
223.    DO i=0,36
224.    f1(i)=k13(i)*coseno(i)*sen(i)
225.    f2(i)=k13(i)*seno(i)*sen(i)
226.    enddo
227.    do i=0,36
228.    xva(i)=0
229.    yva(i)=0

```

```

230.     end do
231.     do i=1,36
232.     if (alfa1<1.0) then
233.     escx=2.5
234.     escy=4.
235.     end if
236.     if (alfa1>=1.0 .and. alfa1<10.0) then
237.     escx=3.0
238.     escy=3.0
239.     end if
240.     if (alfa1>=10.0 .and. alfa1<20.0) then
241.     escx=3.5
242.     escy=1.0
243.     end if
244.     if (alfa1>=20.0 .and. alfa1<30.0) then
245.     escx=4.0
246.     escy=1.0
247.     end if
248.     if (alfa1>=30.0 .and. alfa1<50.0) then
249.     escx=5.0
250.     escy=0.5
251.     end if
252.     if (alfa1>=50.0) then
253.     escx=8.0
254.     escy=1.0
255.     end if
256.     xva(i)=(f1(i)+f1(i-1))*escx+xva(i-1)
257.     if (i==18) then
258.     yva(18)=0.0
259.     else
260.     yva(i)=(f2(i)+f2(i-1))*escy+yva(i-1)
261.     endif
262.     end do
263.     J=0
264.     DO I=19,36
265.     XVA(I)=XVA(17-J)
266.     YVA(I)=-YVA(17-J)
267.     J=J+1
268.     END DO
269.     !*****
270.     !IMPRESION DE DATOS
271.     PRINT*, "                                CUADRO N-02"
272.     PRINT*, " THETA                      Qi(Rad)                      Qi(0)
Xi=Qi(0)+F(t)0"
273.     do i=0,18
274.     print 3, tetha(i), qi(i), qi(i)*180/pi,xi(i)
275.     3 format(2x,f5.1,2x,f18.9,2x,f18.6,2x,f17.9)
276.     end do
277.     print*
278.     read*
279.     PRINT*, "                                CUADRO N-02"
280.     PRINT*, " THETA                      Qi(Rad)                      Qi(0)
Xi=Qi(0)+F(t)0"
281.     do i=19,36
282.     print 4, tetha(i), qi(i), qi(i)*180/pi,xi(i)
283.     4 format(2x,f5.1,2x,f18.9,2x,f18.6,2x,f17.9)
284.     end do
285.     read*
286.     CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
287.     !*****
288.     Print*, "                                CUADRO N-03"

```

```

289.      PRINT*, "      Theta      Sen(x)      Cox(x)
      Sen(Theta)      Cos(Theta) "
290.      do i=0,18
291.          print 5, tetha(i), seno(i), coseno(i),sen(i),cose(i)
292.          5 format(2x,f5.1,2x,f14.9,2x,f14.9,2x,f14.9,2x,f14.9)
293.      end do
294.      print*
295.      read*
296.      Print*, "      CUADRO N-03"
297.      PRINT*, "      Theta      Sen(x)      Cox(x)
      Sen(Theta)      Cos(Theta) "
298.      do i=19,36
299.          print 6, tetha(i), seno(i), coseno(i),sen(i),cose(i)
300.          6 format(2X,f5.1,2x,f14.9,2x,f14.9,2x,f14.9,2x,f14.9)
301.      end do
302.      read*
303.      CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
304.      !*****
305.      Print*, "      CUADRO N-04"
306.      print*, " Theta      2/q0 "
307.      do i=0,18
308.          print 7, tetha(i),k13(i)
309.          7 format(2x,f5.0,3x,f14.6)
310.      end do
311.      print*
312.      read*
313.      Print*, "      CUADRO N-04"
314.      print*, " Theta      2/q0 "
315.      do i=19,36
316.          print 8, tetha(i),k13(i)
317.          8 format(2x,f5.0,3x,f14.6)
318.      end do
319.      read*
320.      CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)
321.      !*****
322.      print*, "      CUADRO N-05"
323.      PRINT*, "      TETHA      F1      F2 "
324.      DO I=0,18
325.          PRINT 9, TETHA(I),F1(I),F2(I)
326.          9 FORMAT(2X,F8.0,2X,F12.6,2X,F12.6)
327.      END DO
328.      PRINT*
329.      read*
330.      print*, "      CUADRO N-05"
331.      PRINT*, "      TETHA      F1      F2 "
332.      DO I=19,36
333.          PRINT 10, TETHA(I),F1(I),F2(I)
334.          10 FORMAT(2X,F8.0,2X,F12.6,2X,F12.6)
335.      END DO
336.      read*
337.      CALL CLEARSCREEN ($GCLEARSCREEN)

338.      !*****
339.      !generando el archivo perfil.xls
340.      do i=0,36
341.          write(5,500) xva(i),yva(i)
342.          500 format(1x,f12.8,2x,f12.8)
343.      end do
344.      CLOSE(5)
345.      !*****
346.      PRINT*, "      CUADRO N-06"

```

```

347. PRINT*, "      TETHA          X/Va          Y/Va "
348. do i=0,18
349. print 11, tetha(i),xva(i),yva(i)
350. 11 format(2x,f8.0,3x,f14.6,3x,f14.6)
351. enddo
352. print*
353. read*
354. PRINT*, "          CUADRO N-06"
355. PRINT*, "      TETHA          X/Va          Y/Va "
356. do i=19,36
357. print 12, tetha(i),xva(i),yva(i)
358. 12 format(2x,f8.0,3x,f14.6,3x,f14.6)
359. enddo
360. read*
361. !*****
362. !FINAL DEL PROGRAMA
363. END PROGRAM Litill
364. !SUBPROGRAMAS

365. function func_y(x)
366. double precision x
367. PI=3.14159265
368. func_y=(2./pi)*(log(x)/(x*x-1))
369. return
370. end function func_y
371. Subroutine imprimir(tetha,t,sft)
372. real,dimension(36):: t,tetha,sft
373. print*, "          CUADRO N-01"
374. print*, "  Theta          T          F(T) "
375. do i=0,18
376. print 1,tetha(i),t(i),sft(i)

377. 1 format(2x,f5.1,3x,f14.6,3x,f14.6)
378. end do
379. READ*

380. print*, "          CUADRO N-01"
381. print*, "  Theta          T          F(T) "
382. do i=19,36
383. print 2,tetha(i),t(i),sft(i)
384. 2 format(2x,f5.1,3x,f14.6,3x,f14.6)
385. end do
386. return
387. end subroutine imprimir

```



Datos generados por el programa, dados los siguientes ángulos:

$$\mathbf{a} = \text{arcTg}(0.03) \rightarrow \mathbf{a} = 1.7183^\circ$$

$$\mathbf{b} = \text{arcCos}(0.22) \rightarrow \mathbf{b} = 77.29^\circ$$

## Tabla 1

THETA	T	F(T)	THETA	T	F(T)
0	0	0			
10	0,002624	0,666189	190	-0,342787	-26,62707
20	0,005288	1,205756	200	-0,170082	-17,32349
30	0,008036	1,708765	210	-0,111924	-13,06794
40	0,010915	2,19859	220	-0,082397	-10,52879
50	0,013985	2,689956	230	-0,064314	-8,794625
60	0,017315	3,195298	240	-0,051944	-7,505742
70	0,020999	3,727241	250	-0,04283	-6,489198
80	0,025165	4,30035	260	-0,035741	-5,650511
90	0,02999	4,933065	270	-0,02999	-4,933065
100	0,035741	5,650511	280	-0,025165	-4,30035
110	0,04283	6,489198	290	-0,020999	-3,727241
120	0,051944	7,505742	300	-0,017315	-3,195298
130	0,064314	8,794625	310	-0,013985	-2,689956
140	0,082397	10,52879	320	-0,010915	-2,19859
150	0,111924	13,06794	330	-0,008036	-1,708765
160	0,170082	17,32349	340	-0,005288	-1,205756
170	0,342787	26,62707	350	-0,002624	-0,666189
180		90	0	0	0

## Tabla 2

THETA	$Q_i$ (rad)	$Q_i$ (°)	$c = Q_i(°)+F(t)$	THETA	$Q_i$ (rad)	$Q_i$ (°)	$c = Q_i(°)+F(t)$
0	0	0	0				
10	-0,1860273	-10,65858	-9,992393	190	-0,00637899	-0,365489	-26,99256
20	-0,182404	-10,45098	-9,245221	200	-0,003334	-0,191024	-17,51451
30	-0,202014	-11,57455	-9,865784	210	0,00093207	0,053404	-13,01454
40	-0,2136312	-12,24017	-10,04158	220	0,0040014	0,229263	-10,29953
50	-0,2037235	-11,6725	-8,982543	230	0,00830408	0,475789	-8,318836
60	-0,1853613	-10,62042	-7,425119	240	0,01160241	0,664769	-6,840973
70	-0,1531232	-8,773314	-5,046073	250	0,01626453	0,931889	-5,557309
80	-0,1137189	-6,515614	-2,215263	260	0,02004627	1,148566	-4,501945
90	-0,07582076	-4,344209	0,588856	270	0,02553086	1,46281	-3,470255
100	-0,0636282	-3,645627	2,004884	280	0,03019259	1,729908	-2,570442
110	-0,04951514	-2,837008	3,652189	290	0,03734072	2,139466	-1,587775
120	-0,04271178	-2,447205	5,058537	300	0,0727327	4,167277	0,9719788
130	-0,03404659	-1,950726	6,843899	310	0,1211584	6,941864	4,251909
140	-0,02933739	-1,680909	8,847881	320	0,1744104	9,992979	7,794389
150	-0,02300297	-1,317973	11,74997	330	0,2367196	13,56304	11,85427
160	-0,01928442	-1,104916	16,21857	340	0,2960651	16,96328	15,75752
170	-0,01413934	-0,810124	25,81694	350	0,8170562	46,81387	46,14768
180	-0,01090419	-0,624764	89,37524	0	0,5105293	29,25117	0

# Tabla 3

è	Sen c	Cos c	Sen è	Cos è	è	Sen c	Cos c	Sen è	Cos è
0	0	0	0	1					
10	-0,1735174	0,9848308	0,1736482	0,9848077	190	-0,4538748	0,8910655	-0,1736483	-0,9848077
20	-0,1606603	0,9870098	0,3420202	0,9396926	200	-0,3009474	0,9536408	-0,3420202	-0,9396926
30	-0,1713408	0,9852118	0,5	0,8660254	210	-0,2251983	0,974313	-0,5000001	-0,8660253
40	-0,1743628	0,9846815	0,6427876	0,7660444	220	-0,1787941	0,9838865	-0,6427877	-0,7660444
50	-0,1561335	0,9877359	0,7660444	0,6427876	230	-0,1446815	0,9894783	-0,7660445	-0,6427875
60	-0,1292304	0,9916146	0,8660254	0,5	240	-0,119114	0,9928806	-0,8660254	-0,4999999
70	-0,08795679	0,9961243	0,9396926	0,3420201	250	-0,09684134	0,9952998	-0,9396927	-0,34202
80	-0,03865401	0,9992527	0,9848078	0,1736481	260	-0,07849293	0,9969147	-0,9848078	-0,1736481
90	0,0102773	0,9999472	1	-4,4E-08	270	-0,06053036	0,9981664	-1	1,31E-07
100	0,03498468	0,9993879	0,9848077	-0,1736482	280	-0,04484763	0,9989938	-0,9848077	0,1736483
110	0,06369957	0,9979691	0,9396926	-0,3420202	290	-0,02770836	0,999616	-0,9396926	0,3420203
120	0,08817349	0,9961051	0,8660254	-0,5000001	300	0,01696342	0,9998561	-0,8660253	0,5000001
130	0,1191647	0,9928745	0,7660444	-0,6427876	310	0,07414172	0,9972477	-0,7660443	0,6427878
140	0,1538116	0,9881002	0,6427876	-0,7660445	320	0,1356186	0,9907611	-0,6427875	0,7660446
150	0,2036412	0,9790456	0,4999999	-0,8660254	330	0,2054232	0,9786732	-0,4999999	0,8660255
160	0,2793024	0,9602032	0,3420201	-0,9396927	340	0,2715668	0,9624196	-0,34202	0,9396927
170	0,4354973	0,90019	0,1736481	-0,9848078	350	0,7211279	0,6928019	-0,173648	0,9848078
180	0,9999406	0,01090392	-8,7E-08	-1	0	0	1	0	1

# Tabla 4

Theta	2/(qo)	Theta	2/(qo)
0	0,585646		
10	2,671303	190	2,684367
20	2,633399	200	2,339111
30	2,568536	210	2,222848
40	2,480939	220	2,16382
50	2,375895	230	2,12767
60	2,259228	240	2,102942
70	2,136786	250	2,084723
80	2,049407	260	2,07055
90	2,059054	270	2,059054
100	2,07055	280	2,049407
110	2,084723	290	2,136786
120	2,102942	300	2,259228
130	2,12767	310	2,375895
140	2,16382	320	2,480939
150	2,222848	330	2,568536
160	2,339111	340	2,633399
170	2,684367	350	2,671303
180	1,999101	0	0

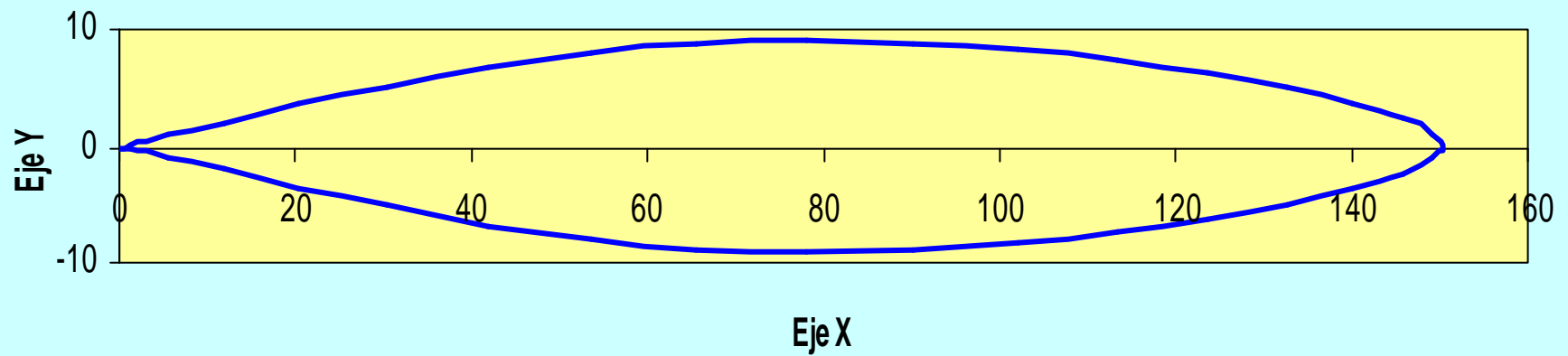
# Tabla 5

THETA	F1 ( )	F2 ( )	THETA	F1 ( )	F2 ( )
0	0	0			
10	0,45683	-0,080489	190	-0,415357	0,211567
20	0,888976	-0,144703	200	-0,762935	0,240765
30	1,265276	-0,220048	210	-1,082875	0,250291
40	1,570288	-0,278059	220	-1,368465	0,248681
50	1,79772	-0,284169	230	-1,612741	0,235815
60	1,940143	-0,252846	240	-1,808236	0,216931
70	2,00014	-0,17661	250	-1,949791	0,189712
80	2,016764	-0,078014	260	-2,032803	0,160054
90	2,058945	0,021162	270	-2,055278	0,124635
100	2,037845	0,071337	280	-2,016241	0,090515
110	1,95502	0,124787	290	-2,007151	0,055636
120	1,814108	0,160582	300	-1,956267	-0,03319
130	1,618276	0,194225	310	-1,815031	-0,134941
140	1,374326	0,213933	320	-1,579983	-0,216273
150	1,088135	0,226332	330	-1,256878	-0,263818
160	0,768185	0,223448	340	-0,866827	-0,244593
170	0,41961	0,203001	350	-0,321368	-0,334507
180	0	0	360	0	0

# TABLA 6

Eje X (x/Va)	Eje Y (y/Va)
0	0
1,370491	-0,241467
5,407909	-0,9170423
11,87066	-2,011293
20,37736	-3,505613
30,48138	-5,192299
41,69497	-6,803344
53,51582	-8,091712
65,56653	-8,855586
77,79366	-9,026144
90,08403	-8,748649
102,0626	-8,160275
113,37	-7,304168
123,6672	-6,239747
132,645	-5,015272
140,0323	-3,694477
145,6013	-2,345137
149,1647	-1,06579
150,4235	0
149,1647	1,06579
145,6013	2,345137
140,0323	3,694477
132,645	5,015272
123,6672	6,239747
113,37	7,304168
102,0626	8,160275
90,08403	8,748649
77,79366	9,026144
65,56653	8,855586
53,51582	8,091712
41,69497	6,803344
30,48138	5,192299
20,37736	3,505613
11,87066	2,011293
5,407909	0,9170423
1,370491	0,241467
0	0

### PERFIL AERODINAMICO PARA ALFA=1.7183 - BETA=77.29



## **CAPITULO VI**

### **6.1 Conclusiones y Recomendaciones**

#### **CONCLUSIONES**

1. Se ha demostrado que el método de Sir James Lighthill sirve para diseñar un perfil aerodinámico utilizando matemáticas superiores y obtener algo concreto.
2. El software grafica el perfil aerodinámico de acuerdo a parámetros propuestos por el usuario aplicables a diferentes realidades.
3. Es un método ideal y exacto, y las pérdidas que en su posterior uso se deriven, es ajeno al método.

#### **RECOMENDACIONES**

1. Se puede utilizar el método para aplicaciones técnicas, de investigación científica-tecnológica y artísticas.
2. Se recomienda continuar con los estudios de perfiles aerodinámicos por el método de Sir James Lighthill, para aplicaciones en fluidos más densos (líquidos, grasas, etc.).



## BIBLIOGRAFÍA

1. Philip M. , Gerhart, Fundamentos de Mecánica de Fluidos.
2. Irving H. Shames, La Mecánica de los Fluidos, ed. Mc. Graw-Hill.,Mexico 1980
3. A. Hansen, Mecánica de Fluidos, ed. Trillas.
4. Ing. Manuel Casas, Mecánica de los Fluidos , Lima 1979.
5. Francisco Ugarte Palacín, Mecanica de Fluidos, ed. San Marcos 1989.
6. R. Roca V., Introducción a la Mecánica de los Fluidos. Ed. Limusa.
7. Van Wylen,G.J., y Sonntag R. E., Fundamentals of Classical Thermodynamics, Jhon Wiley and Sons, New York, 1986.
8. Holman J.P., Thermodynamics, McGraw-Hill, New York 1988.
9. ASME, "ASME Orientation and Guide for use of SI (Metric) Units" (ASME Guide SI-1) American Society of Mechanical Engineers, New York.
10. Benedic, R.P., Fundamentals of Temperature , Pressure and Flow Measurement (2da . ed.), Wiley, New York, 1977.
11. Bradshaw,P., Experimental Fluid Mechanics, Macmillan, New York, 1964.
12. Bradshaw,P., An Introduction to Turbulence and Its Measurement, Pergamon Press, Oxford, 1971.
13. Dean, R.C., Jr., Aerodynamic Measurements, MIT Gas Turbine Lab Report, 1954, disponible en University Microfilms, Ann Arbor, MI.
14. Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Alburquerque,1976.
15. Chung, T.J., Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1978.
16. Anderson, D.A., Tannehill J.C., y Pletcher R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer , McGraw-Hill-Hemisfere, 1987.
17. Beckwith, T., N. Buck y R. Marangoni, Mechanical Measurement(3ra. ed.) Addison-Wesley, Reading, M.A, 1981.
18. White,F.M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1979.
19. Kline S.J., Flow Visualization, National Committee for Fluid Mechanics Films, distribuido por Enciclopedia Britanica Corporacion Educativa.
20. Gerhart,P.M., "Averaging Methods for Determining The Performance of large Fans from Field Measurements",Transactions of the American Society of Mechanical Engineers: Journal of Engineering for Power, Abril 1981.
21. Ower, E., y Pankhurst R., Measurement of Air Flow (5ta ed.), Pergamon Press, Oxford, 1977.
22. Gerhart,P.M., "Averaging Methods for Determining The Performance of large Fans from Field Test", ASME Journal of Engineering for Power, Octubre 1981.
23. Van Wylen,G.J., y Sonntag R. E., Fundamentals of classical thermodynamics (3ra ed.), Jhon Wiley and Sons, New York, 1986.
24. Moran, M., y Shapiro H., Fundamentals of Engineering Thermodynamics, Jhon Wiley and Sons, New York, 1988.
25. Shepherd,D.G., Principles of Turbomachinery, Macmillan, New York, 1956.
26. Dixon, S.L., Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery (3ra ed.), Pergamon Press, Oxford, 1981.
27. Stepanoff,A.J., Centrifugal and Axial Flow Pumps, Jhon Wiley and Sons, New York, 1948.

28. Wilson,D.G. The Desing of High Efficiency Gas Turbines and Turbomachines, Cambrigde,Mass.,MIT Perss, 1984.
29. White F.M., Viscous fluid FlowC
30. Daily J.W., y Halemán, D.R.F. Fluid dynamics, Addison Wesley, Reading, Mass,1966.
31. Nikuradse, J.,”Stomungsesetze in Rauhen Rohren.” VDI – Forschungsch, no361 (1933) Tambien disponible como NACA Tech Memo 1292.
32. Colebrook,C.F.,”Turbulent Flor in Pipes Whit Particular Referente to the Transition Between the Smooth and Rough Pipe Laws”,J.Inst. Civ. Eng. Lond., vol 11, 1939.
33. Moody,L.F. “Friction Factors for pipe Flow” Transaction of the ASME, vol. 66, 1944.
34. White,F.M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1974.
35. Lindgren, E.R.,Oklahoma State University Civil Engineering Dept., Report IAD621071, 1965.
36. Flow of Fluids Through Valves, Fittings, and Pipe”, Technical Paper No 410 (1978), The Crane Co. disponible atraves de The Crane Co., New York.
37. ASHRAE Handbook of fundamentals, publicado cada cuatro años por American Society of Heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers.
38. Idel`chek, I.E.,”Handbook of Hidraulic Resistance” (2da ed.) Hemisfere Washington, 1986.
39. Hydraulic Institute Engineering Data book, Hydraulic Institute, Cleveland, 1988.
40. Bean, H.S. (ed.), Fluid Meters: Their Theory and Application (6a. ed.), American Society of Mechanical Engineers, New York , 1971.
41. Measurement of Fluid Flow by Means of Orifice Plates, Nozzles, and Venturi Tubes Inserted in circular Cross Section Conduits Running Full”,International Standards Organization Report DIS-5167, 1976.
42. Benedic, R.P., Fundamentals of Temperature , Pressure and Flow Measurement (3ra . ed.), Jhon Wiley and Sons, New York, 1984.
43. “Laboratory Methods of testing Fans for Rating”, AMCA Bulleting 210-74, ASHRAE Standard 210-75, a Joint Bulleting of Air Moving and Conditionig Association and the American Society of Heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers, 1974.
44. “ASME Performance Test code No 11 – Fans”, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1984.
45. Jorgensen, R. , Fan Engineering, (8a. ed.),Buffalo forge Co., Buffalo, NY. 1983.
46. Cross H. , “Analysis of flow in Networks of Conduits or Conductors”, University of Illinois Bulletin No 286 , noviembre 1936.
47. Jepson, R.W., Analysis of Flow in Pipe Networks, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, MI, 1976.
48. Shapiro, A.H. (Director) , The Fluid Dynamics of Drag (4 partes), NCFMF Film, Disponible en Encyclopedia Britannica Films, Chicago IL.
49. Hoerner,S.F., Fluid Dynamic Drag publicado por el autor en Midland Park, NJ, 1965.
50. Whitford, D.H., y Minardi, J.E. “Utility-Sized Madaras Wind Plants”, The International Journal of Ambient Energy, vol.2, num. 1 , 1981.
51. Abbott, I.H., y von Doenhoff A.E. “Theory of Wings Section”Dover Books, New York, 1959.
52. Lissaman and Shollenberger , “Formation Flight of Birds”, Science, vol. 168, num.3934, mayo 1970.

53. Scibor-Rylski, A.J., "Road Vehicle Aerodynamics", Halsted Perss, New York, 1975.
54. "Automotive Aerodynamics" (Aerodinamica Automotor), SAE/PT-78/16, Society of Automotive Engineers, warrendale, P.A., 1978.
55. Morel ,T., y Dalton C. (editores), "Aerodynamics of transportation", Memorias de un Simposio realizado en la Joint ASME-CSME Applied mechanics, fluids engineering and Bioengineering Conference, niagara Falls, NY, junio 1979.
56. Fox, R.W., y MacDonald, A.T. "Introduction to Fluid Mechanics"(2da. Ed.) , Wiley, New York,1978.
57. Kline,S.J., Morkovin,M., Sovran,G., y Cockrell, D., "Computation of Turbulent Boundary Layers" 1968 AFOSR-IFP-Standford Conference Departament of mechanical engineering, Standford University, Palo alto, Calif., 1968.
58. Schling,H., "Boundary Layer Theory" (7ma.ed.), McGraw-Hill, New York 1979.
59. Cebeci, T., y Bradshaw, P. , "Momentum Transfer in Boundary layers", McGraw-Hill-Hemisphere, New York 1977.
60. Schetz,J.A., "Foundations of Boundary layer theory for momentum, Heat, and Mass Transfer", Prentice-Hill, Englewood Cliffs, N.J.,1984.
61. Panton, R.L. "Incompressible Flow", Wiley-Interscience, New York, 1984.
62. Curie,I.G. "Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, New York 1974.
63. Pao, R.H.F., Fluid Dynamics, Merrill, Columbus , Oh., 1967.
64. Hess, J.L., "Review of Integral-equation Thecniques for solving potential-flow problems whith emphasis on the surface-source Method", Computer Methods in applied Mechanics and engineering,5,1975,pp 145-196.
65. Anderson, J.D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw-Hill, New York 1984.
66. Blasius,H., "Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung" Z. Mat. Physik, 56, 1. (Disponible en ingles como NACA tech memo 1256).
67. Thwaites,B., Approximate Calculation of laminar boundary Layer", Aeronautical Quartely,1,1949.
68. Shapiro,A.H., "Dynamics and thermodynamics of Compresible fluid Flow" vols. 1 y 2 , Ronald Press, New York, 1953.
69. Zucker ,R.D., "Fundamentals of Gas Dynamics", Matrix Publishers, Portland, Ore., 1977.
70. Zocrow,M., y Hoffman,J.D. "Gas Dynamics", vols. 1 y 2, Jhon Wiley and Sons, New York, 1976.
71. Jhon,J.E.A., "Gas Dynamics (2da ed.)", Allyn and Bacon, Boston, 1984.
72. Anderson,J.D., "Modern compessible Flow (with historical perspective)", (2da ed.), McGraw-Hill, New York 1990.
73. Liepmann, H.W., y Roshko,A. , "Elements of Gasdynamics" , Jhon Wiley and Sons, New York, 1957.
74. Sears, F.W., Zemansky M.W. y Young H.D. "University Physics" ( 6ta.ed.) , capitulos 14 al 19, Addison-Wesley , Reading Mass., 1982.
75. Coles,D. (principal) "Chanel flow of a compressible fluid", National Committee for fluid mechanics films. Distribuido por Encyclopedia Britannica Film Corporation.

## CRONOGRAMA

